

Г.ЭНДРЮС

# ТЕОРИЯ РАЗБИЕНИЙ



GIAN-CARLO ROTA, *Editor*  
**ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS**  
Volume 2

---

---

Section: Number Theory  
Paul Turán, *Section Editor*

---

---

# **The Theory of Partitions**

**George E. Andrews**

Pennsylvania State University  
University Park, Pennsylvania



1976

**Addison-Wesley Publishing Company**

Advanced Book Program  
Reading, Massachusetts

London · Amsterdam · Don Mills, Ontario · Sydney · Tokyo

Г.Эндрюс

---

---

# ТЕОРИЯ РАЗБИЕНИЙ

---

---

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

Б. С. СТЕЧКИНА

МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1982

22.18

364

УДК 519.6

**Теория разбиений.** Э н д р ю с Г. Перев. с англ. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 256 с.

Книга посвящена важному комбинаторному и теоретико-числовому объекту — разбиению натуральных чисел. В ней с исчерпывающей полнотой представлены многие направления исследований, связанные с этим объектом.

Библ. 412 назв.

Э  $\frac{1502000000-107}{053(02)-82}$  48-82

© 1976 by Addison Wesley Publishing Company, Inc.

© Перевод на русский язык.  
Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической литературы, 1982

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

О теории разбиений . . . . .	8
От редактора энциклопедии . . . . .	10
Предисловие . . . . .	12
<b>Г л а в а 1. Элементарная теория разбиений . . . . .</b>	<b>15</b>
1.1. Введение . . . . .	15
1.2. Бесконечные произведения производящих функций одного переменного . . . . .	17
1.3. Графическое представление разбиений . . . . .	20
Задачи . . . . .	27
Замечания . . . . .	28
Литература . . . . .	29
<b>Г л а в а 2. Ряды производящих функций . . . . .</b>	<b>30</b>
2.1. Введение . . . . .	30
2.2. Элементарные тождества с рядами и произведениями . . . . .	31
2.3. Приложения к разбиениям . . . . .	37
Задачи . . . . .	42
Замечания . . . . .	44
Литература . . . . .	45
<b>Г л а в а 3. Разбиения на ограниченные части и перестановки . . . . .</b>	<b>47</b>
3.1. Введение . . . . .	47
3.2. Производящая функция для ограниченных разбиений . . . . .	47
3.3. Свойства многочленов Гаусса . . . . .	49
3.4. Перестановки и полиномиальные коэффициенты Гаусса . . . . .	53
3.5. Унимодальное свойство . . . . .	59
Задачи . . . . .	63
Замечания . . . . .	65
Литература . . . . .	65
<b>Г л а в а 4. Композиции и проблема Симона Ньюкомба . . . . .</b>	<b>67</b>
4.1. Введение . . . . .	67
4.2. Композиции чисел . . . . .	67
4.3. Векторные композиции . . . . .	70
4.4. Проблема Симона Ньюкомба . . . . .	72
Задачи . . . . .	75
Замечания . . . . .	77
Литература . . . . .	77
<b>Г л а в а 5. Выражения Харди—Рамануджана—Радемахера для <math>p(n)</math> . . . . .</b>	<b>80</b>
5.1. Введение . . . . .	80
5.2. Формула для $p(n)$ . . . . .	83
Задачи . . . . .	93
Замечания . . . . .	97
Литература . . . . .	97

<b>Глава 6. Асимптотика бесконечного произведения производящих функций</b>	100
6.1. Введение	100
6.2. Доказательство теоремы 6.2	101
6.3. Приложения теоремы 6.2	107
Задачи	108
Замечания	111
Литература	111
<b>Глава 7. Тожества типа Роджерса—Рамануджана</b>	113
7.1. Введение	113
7.2. Производящие функции	116
7.3. Тожества Роджерса—Рамануджана и их обобщение Гордона	119
7.4. Тожества Гёллница—Гордона и их обобщение	124
Задачи	126
Замечания	128
Литература	128
<b>Глава 8. Общая теория тождеств с разбиениями</b>	131
8.1. Введение	131
8.2. Основания	131
8.3. Идеалы разбиений порядка 1	134
8.4. Сцепленные идеалы разбиений	138
Задачи	147
Замечания	148
Литература	148
<b>Глава 9. Методы решета, связанные с разбиениями</b>	149
9.1. Введение	149
9.2. Включение-исключение	149
9.3. Решето для последовательных рангов	153
Задачи	166
Замечания	167
Литература	167
<b>Глава 10. Свойства делимости функций разбиений</b>	168
10.1. Введение	168
10.2. Теорема Рёдсета о двоичных разбиениях	170
10.3. Гипотеза Рамануджана для $5^n$	175
Задачи	183
Замечания	184
Литература	184
<b>Глава 11. Многомерные разбиения</b>	186
11.1. Введение	186
11.2. Плоские разбиения	186
11.3. Соответствие Кнута—Шенстеда	191
11.4. Многомерные разбиения	196
Задачи	205
Замечания	206
Литература	206
<b>Глава 12. Векторные или многокомпонентные разбиения</b>	208
12.1. Введение	208
12.2. Многокомпонентные производящие функции	209
12.3. Многочлены Белла и формулы для функций многокомпонентных разбиений	210

12.4. Ограниченные двухкомпонентные разбиения . . . . .	213
Задачи . . . . .	215
Замечания . . . . .	216
Литература . . . . .	216
<b>Глава 13. Разбиения в комбинаторике . . . . .</b>	<b>218</b>
13.1. Введение . . . . .	218
13.2. Разбиения и конечные векторные пространства . . . . .	218
13.3. Разбиения множеств . . . . .	220
13.4. Комбинаторика симметрических функций . . . . .	226
Задачи . . . . .	230
Замечания . . . . .	233
Литература . . . . .	233
<b>Глава 14. Вычисление функций разбиений . . . . .</b>	<b>236</b>
14.1. Введение . . . . .	236
14.2. Элементарные алгоритмы . . . . .	236
14.3. Алгоритмы из производящих функций . . . . .	238
14.4. Вычисления для многомерных разбиений . . . . .	240
14.5. Краткие таблицы функций разбиений . . . . .	243
14.6. Таблица функции плоских разбиений . . . . .	243
14.7. Таблица многочленов Гаусса . . . . .	244
14.8. Другие таблицы . . . . .	244
Замечания . . . . .	244
Литература . . . . .	248
<b>Добавление. Экстремальные свойства разбиений (Б. С. Стечкин)</b>	<b>249</b>
<b>Указатель обозначений . . . . .</b>	<b>254</b>



Всякое представление натурального числа суммой натуральных чисел называется разбиением числа. Это понятие, прежде всего, комбинаторного и теоретико-числового характера. Задачи же о разбиениях сыграли важную роль для всей математики.

Разбиения изучаются в комбинаторике и теории чисел: к классически комбинаторным относятся задачи подсчета и перечисления разбиений данного типа, в теории чисел решают проблемы об аддитивных представлениях чисел с арифметическими ограничениями на слагаемые (таковы, например, проблемы Гольдбаха и Варинга). При решении задач о разбиениях возникают серьезные трудности, их преодоление потребовало большой изобретательности и повлекло создание специальных методов теории разбиений [17 (3), 40 (5)]\*).

Исторически первым и общим для всей теории разбиений явился метод производящих функций. Разработанный Л. Эйлером, в том числе и для нужд теории разбиений, этот аналитический метод оказался эффективным инструментом и для комбинаторики, и для теории чисел; он был развит до таких тонких форм, как метод производящих функций Дирихле, метод тригонометрических сумм, метод характеристических функций, — методов, применяемых не только в комбинаторике и теории чисел [40, 41, 43 (5)].

Развитие метода производящих функций во многом шло за счет задач о разбиениях. Один из самых ярких моментов этого развития — создание «кругового» метода, первоначально — для подсчета всех разбиений фиксированного числа. С качественными этапами решения этой задачи связаны имена Успенского [42 (5)], Харди, Рамануджана и Радемахера [5)].

Другие методы теории разбиений уже не столь эффективны: алгебраические только зарождаются, а комбинаторные, хотя и несут в себе остроумные соображения, не обладают еще достаточной степенью общности. Одно из интересных направлений развития этих методов — создание синтезированного (на идейной основе метода производящих функций) комбинаторно-алгебраического подхода к широкому классу задач [24, 37 (13)].

---

\*) Число в круглых скобках обозначает номер главы, по списку литературы которой цитируется источник.

Наблюдается применимость элементов теории разбиений в других областях математики. Имеются и реальные явления, допускающие адекватное описание в терминах разбиений числа [34, 35, 38 (13)].

Книга представляет собой изложение комбинаторных аспектов теории разбиений. В ней хорошо представлены аналитические методы.

При переводе на русский язык в текст вносились лишь библиографические добавления, все они отмечены звездочкой. В главу 13 включены три новые задачи.

Все общие комментарии по существу сделаны в нашем предисловии. По части конкретных замечаний должно лишь указать на недостаточную аргументированность рассуждений при использовании формальных степенных рядов в гл. 13. Рассуждения § 13.4 становятся корректными, если кольцо многочленов от счетного числа переменных рассматривать как топологическое кольцо.

27 июля 1981 года

*С. М. Воронин*  
*Б. С. Стечкин*

## ОТ РЕДАКТОРА ЭНЦИКЛОПЕДИИ

---

Во многом математика состоит из фактов, которые могут быть представлены и описаны весьма сходно с тем, как это делается со всяким иным природным явлением. Именно такие факты (то проявляющиеся из теорем, то скрывающиеся за их доказательствами) составляют по существу основу большинства приложений математики, их отличает высокая жизнестойкость к изменениям стилей и интересов.

Эта энциклопедия постарается представить фактуальное тело всей математики. Ясность изложения, доступность неспециалистам и всеобъемлемость библиографий — таковы неперенные требования к каждому автору. Тома энциклопедии будут выходить, не связываясь какой-либо смысловой очередностью, но группируясь по секциям, посвященным уже сложившимся ветвям сегодняшней математики. При необходимости число томов и секций может пересматриваться и меняться.

Ожидается, что это начинание сделает математику более широко используемой там, где это необходимо, и более доступной в тех областях, где она ждет своего применения, но куда еще не проникла ввиду недостаточной ознакомленности.

\* \* \*

Теория разбиений — это одна из весьма немногих ветвей математики, которая может быть воспринята всяким, кто проявит немногим более чем простую любознательность к этому предмету. Приложения ее обнаруживаются всюду, где подсчитываются либо классифицируются дискретные объекты, будь то молекулярное или атомное строение вещества, теория чисел

или комбинаторные задачи самого разного происхождения.

Профессором Эндрюсом впервые написано столь подробное руководство по этому многоплановому направлению. Специалист будет обращаться к нему за более глубокими результатами, студента заинтересуют многие обманчиво простые факты, а прикладник сможет обнаружить в нем нужное тождество.

Безвременная кончина профессора Турана оставила книгу без предисловия редактора секции. Достойным знаком памяти этому мастеру теории чисел будет служить настоящая книга.

*Джиан-Карло Рота*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

*Джой, Ами и Кати*

Сразу оговорим, что термин «разбиение» имеет в математике целый ряд значений. Вообще, под разбиением принято понимать всякое расчленение целого на части. Для нас разбиение — это, прежде всего, «разбиение числа  $n$ », т. е. невозрастающая последовательность положительных целых, сумма которых равна  $n$ . Понятие разбиения числа будет расширено при рассмотрении многомерных разбиений, разбиений векторов и разбиений множеств (см. гл. 11, 12, 13). Композиции, или упорядоченные разбиения (т. е. просто последовательности положительных целых), рассматриваются в гл. 4.

Теория разбиений числа имеет интересную историю. Отдельные ее задачи появлялись еще в средние века, однако первые глубокие разработки относятся к восемнадцатому столетию, к тому времени, когда Эйлером были доказаны его многочисленные, красивые и важные теоремы о разбиениях. Именно Эйлер заложил основы теории разбиений числа. В дальнейшей разработке этой теории принимали активное участие такие крупные математики, как Гаусс, Кэли, Лагранж, Лежандр, Литлвуд, Радемахер, Рамануджан, Сильвестр, Харди, Шур, Якоби.

Почти не было книг, целиком посвященных разбиениям; общие комбинаторные аспекты и формальные степенные ряды, относящиеся к разбиениям, находили свое отражение в старых книгах, посвященных элементарному анализу [1, 2] \*), в энциклопедических обзорах по теории чисел [3, 4] и в книгах по комбинаторному анализу [5, 6, 7, 8]. С другой стороны, асимптотиче-

---

\*) 1. Euler L. *Introductio in Analysis Infinitorum*. 2. Cristal J. *Textbook of Algebra*. 3. Bachman S. *Niedere Zahlentheorie*. 4. Hardy G., Wright E. *Introduction to the Theory of Numbers*. 5. MacMahon P. *Combinatory Analysis*. 6. Riordan J. *Introduction to Combinatorial Analysis*. 7. Perens J. *Combinatorial Methods*. 8. Comtet L. *Advanced Combinatorics*. 9. Ayoub R. *Introduction to the Analytic Theory of Numbers*. 10. Knopp M. *Modular Functions in Analytic Number Theory*. 11. Grosswald E. *Topics from the Theory of Numbers*. 12. Ostmann H. *Additive Zahlentheorie*. 13. Rademacher H. *Topics in Analytic Number Theory*.

ские проблемы, связанные с разбиениями, исследовались в работах по аналитической или аддитивной теории чисел [6, 10, 11, 12, 13].

При рассмотрении приложений теории разбиений к различным областям математики выявляется взаимосвязь комбинаторных и асимптотических методов, поэтому в этой книге мы стремились к гармоничному отражению не только самих методов, но и их взаимосвязей.

В главах 1—4 излагаются элементарные разделы теории разбиений; основное внимание здесь уделяется использованию производящих функций.

В главах 5 и 6 представлены асимптотические задачи. Главы 7—9 посвящены тождествам с разбиениями. Глава 10 — о делимости функций разбиений — возвращает нас к аналитическим аспектам разбиений. В главах 11—13 рассматривается ряд обобщений понятия разбиения, а в главе 14 кратко обсуждаются некоторые вычислительные аспекты, связанные с разбиениями.

Каждая глава завершается тремя разделами: в разделе «Замечания» излагаются исторические комментарии по изложенному в данной главе материалу, раздел «Литература» представляет собой достаточно полный, но не всегда совершенно исчерпывающий список относящихся к материалу главы книг и отдельных работ и, наконец, в разделе «Задачи» \*) приводятся формулировки результатов, не освещаемых полностью в основном тексте. Примеры, отмеченные звездочкой, существенны для продвижения по материалу основного текста, остальные же представляют собой упражнения, посредством которых читатель может контролировать свое восприятие материала. Литература по источникам всех этих примеров приводится в тех же главах.

В последнее время стали просматриваться приложения теории разбиений ко многим математическим наукам. Непараметрическим статистикам требуются разбиения с ограничениями, подобные тем, что рассматриваются в главе 3. Ряд перестановочных задач в теории вероятностей и статистике тесно связан с проблемой Симона Ньюкомба из главы 4. Физика частиц использует асимптотики разбиений и тождества, как в главах 5—9. Теория групп (через диаграммы Юнга) тесно связана с материалом главы 12, а связи между разбиениями и общей комбинаторной теорией излагаются в главе 13.

Материал этой книги возвращивался в течение многих лет. Первое знакомство с разбиениями состоялось у меня при слушании захватывающих лекций диссертационного руководителя — профессора Ганса Радемахера. Многие из представленного здесь

---

\*) В оригинале этот раздел носит название «Примеры». (Прим. перев.)

излагалось в курсах Университета Пенсильвании между 1964 и 1975 годами, на семинарах Массачусетского технологического института в течение 1970/71 учебного года, в Университете Эрлангена летом 1975 года и в Университете Висконсина в течение 1975/76 учебного года. Считаю себя обязанным отдать великий долг благодарности многим сотрудникам этих четырех университетов. Особенно хотел бы поблагодарить тех, кто своими ценными советами и замечаниями помогал мне в самом процессе подготовки этой книги, именно, Аски, Баклавский, Берндт, Карлицц.

Наконец, я благодарю свою жену Джой, которая и помогала мне, и вдохновляла меня в осуществлении этой работы.

*Джордж Эндрюс*

## ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ РАЗБИЕНИЙ

## 1.1. Введение

В этой книге детально изучается фундаментальная операция аддитивного разложения — представление натуральных чисел суммами других натуральных чисел.

**О п р е д е л е н и е 1.1.** *Разбиением* натурального числа  $n$  называется всякая конечная невозрастающая последовательность натуральных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , для которой

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i = n.$$

Числа  $\lambda_i$  называются *частями* разбиения.

Часто разбиение  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  будем обозначать просто через  $\lambda$  и писать  $\lambda \vdash n$ , как аналог того, что  $\lambda$  есть разбиение  $n$ . Иногда полезно явно указывать число вхождений каждого слагаемого в разбиение: так, если  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \vdash n$ , то запись  $\lambda = (1^{f_1} 2^{f_2} 3^{f_3} \dots)$  означает, что в разбиении  $\lambda$  имеется ровно  $f_1$  единиц,  $f_2$  двоек и т. д. Заметим, что

$$\sum_{i \geq 1} f_i i = n.$$

В этой книге представлен широкий круг задач о разбиениях, однако наиболее важным и фундаментальным остается вопрос о перечислении разбиений различных типов.

**О п р е д е л е н и е 1.2.** *Функция разбиений*  $p(n)$  определяется как число всех разбиений числа  $n$ .

**З а м е ч а н и е.** Ясно, что  $p(n) = 0$ , если  $n$  отрицательно. Считая, что пустая последовательность образует разбиение нуля, полагаем  $p(0) = 1$ . В следующем списке представлены шесть первых значений функции  $p(n)$  и сами разбиения:

$$p(1) = 1 : 1 = (1);$$

$$p(2) = 2 : 2 = (2), \quad 1 + 1 = (1^2);$$

$$p(3) = 3 : 3 = (3), \quad 2 + 1 = (1 \ 2), \quad 1 + 1 + 1 = (1^3);$$

$$p(4) = 5 : 4 = (4); \quad 3 + 1 = (1 \ 3), \quad 2 + 2 = (2^2),$$

$$2 + 1 + 1 = (1^2 \ 2), \quad 1 + 1 + 1 + 1 = (1^4);$$



$$\begin{aligned}
p(5) = 7 : 5 &= (5), \quad 4 + 1 = (1 \ 4), \quad 3 + 2 = (2 \ 3), \\
&3 + 1 + 1 = (1^3 \ 3), \quad 2 + 2 + 1 = (1 \ 2^2), \\
&2 + 1 + 1 + 1 = (1^3 \ 2), \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = (1^5); \\
p(6) = 11 : 6 &= (6), \quad 5 + 1 = (1 \ 5), \quad 4 + 2 = (2 \ 4), \\
&4 + 1 + 1 = (1^2 \ 4), \quad 3 + 3 = (3^2), \quad 3 + 2 + 1 = (1 \ 2 \ 3), \\
&3 + 1 + 1 + 1 = (1^3 \ 3), \quad 2 + 2 + 2 = (2^3), \\
&2 + 2 + 1 + 1 = (1^2 2^2), \quad 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = (1^4 \ 2), \\
&1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = (1^6).
\end{aligned}$$

Значения  $p(n)$  растут очень быстро с ростом  $n$ ; например,  $p(10) = 42$ ,  $p(20) = 627$ ,  $p(50) = 204 \ 226$ ,  $p(100) = 190 \ 569 \ 292$ ,  $p(200) = 3 \ 972 \ 999 \ 029 \ 388$ .

Во многих случаях наш интерес будет распространяться не на все разбиения, а только на какие-то определенные подмножества множества всех разбиений.

**О п р е д е л е н и е 1.3.** Через  $\mathcal{S}$  обозначаем множество всех разбиений.

**О п р е д е л е н и е 1.4.** Через  $p(S, n)$  обозначаем число разбиений числа  $n$ , принадлежащих подмножеству  $S$  множества  $\mathcal{S}$ .

В качестве  $S$  можно, например, рассматривать  $\mathcal{O}$ -множество всех разбиений с нечетными частями или  $\mathcal{D}$ -множество всех разбиений с различными частями и т. п. В следующем списке представлены начальные таблицы  $\mathcal{O}$ - и  $\mathcal{D}$ -разбиений:

$$\begin{aligned}
p(\mathcal{O}, 1) &= 1 : 1 = (1), \\
p(\mathcal{O}, 2) &= 1 : 1 + 1 = (1^2), \\
p(\mathcal{O}, 3) &= 2 : 3 = (3), \quad 1 + 1 + 1 = (1^3), \\
p(\mathcal{O}, 4) &= 2 : 3 + 1 = (1 \ 3), \quad 1 + 1 + 1 + 1 = (1^4), \\
p(\mathcal{O}, 5) &= 3 : 5 = (5), \quad 3 + 1 + 1 = (1^2 \ 3), \\
&1 + 1 + 1 + 1 + 1 = (1^5), \\
p(\mathcal{O}, 6) &= 4 : 5 + 1 = (1 \ 5), \quad 3 + 3 = (3^2), \quad 3 + 1 + 1 + 1 = (1^3 \ 3), \\
&1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = (1^6), \\
p(\mathcal{O}, 7) &= 5 : 7 = (7), \quad 5 + 1 + 1 = (1^2 \ 5), \quad 3 + 3 + 1 = (1^3 2), \\
&3 + 1 + 1 + 1 + 1 = (1^4 \ 3), \\
&1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = (1^7); \\
p(\mathcal{D}, 1) &= 1 : 1 = (1), \\
p(\mathcal{D}, 2) &= 1 : 2 = (2), \\
p(\mathcal{D}, 3) &= 2 : 3 = (3), \quad 2 + 1 = (1 \ 2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(\mathcal{D}, 4) &= 2: \quad 4 = (4), \quad 3 + 1 = (1 \ 3), \\
p(\mathcal{D}, 5) &= 3: \quad 5 = (5), \quad 4 + 1 = (1 \ 4), \quad 3 + 2 = (2 \ 3), \\
p(\mathcal{D}, 6) &= 4: \quad 6 = (6), \quad 5 + 1 = (1 \ 5), \quad 4 + 2 = (2 \ 4), \\
&\quad 3 + 2 + 1 = (1 \ 2 \ 3); \\
p(\mathcal{D}, 7) &= 5: \quad 7 = (7), \quad 6 + 1 = (1 \ 6), \quad 5 + 2 = (2 \ 5), \\
&\quad 4 + 3 = (3 \ 4), \quad 4 + 2 + 1 = (1 \ 2 \ 4).
\end{aligned}$$

Здесь обращает на себя внимание тот факт, что  $p(\mathcal{O}, n) = p(\mathcal{D}, n)$  для  $n \leq 7$ , в то время как связь между самими разбиениями этих двух типов довольно слаба (см. следствие 1.2).

В этой главе представлены два наиболее элементарных инструмента для изучения разбиений: 1) бесконечное произведение производящих функций; 2) графическое представление разбиений.

## 1.2. Бесконечные произведения производящих функций одного переменного

**О п р е д е л е н и е 1.5.** *Производящей функцией*  $f(q)$  для последовательности чисел  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  называется степенной ряд  $f(q) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$ .

**З а м е ч а н и е.** Во многих задачах, с которыми нам предстоит сталкиваться, достаточно рассматривать функцию  $f(q)$  лишь как «формальный степенной ряд». В рамках такого подхода многие манипуляции с рядами и произведениями можно обосновывать почти тривиально. С другой стороны, для многих асимптотических вычислений (см. гл. 6) требуется, чтобы производящие функции являлись аналитическими функциями комплексного переменного  $q$ . В действительности оба эти подхода имеют свои преимущества (Бендером (1974) обсуждались возможности перехода от одной модели к другой). Мы будем по преимуществу формулировать наши теоремы о производящих функциях с явными условиями сходимости. По большей части мы будем иметь дело с абсолютно сходящимися бесконечными рядами и бесконечными произведениями; это обеспечивает аналитичность при всевозможных перестановках рядов и переменных суммирования.

**О п р е д е л е н и е 1.6.** Пусть  $H$  — некоторое множество натуральных чисел. Запись « $H$ » будет обозначать множество разбиений, все части которых лежат в  $H$ . Стало быть,  $p(\langle H \rangle, n)$  есть число разбиений  $n$ , все части которых лежат в  $H$ .

Таким образом, если  $H_0$  есть множество всех нечетных натуральных чисел, то « $H_0$ » =  $\mathcal{O}$  и  $p(\langle H_0 \rangle, n) = p(\mathcal{O}, n)$ .

**О п р е д е л е н и е 1.7.** Пусть  $H$  — некоторое множество натуральных чисел. Запись « $H$ » ( $\leq d$ ) будет обозначать множество

тех разбиений, все части которых лежат в  $H$  и в которых каждая часть присутствует не более чем  $d$  раз.

Таким образом, если  $N$  — множество всех натуральных чисел, то  $p(\langle N \rangle (\leq 1), n) = p(\emptyset, n)$ .

**Т е о р е м а 1.1.** Пусть  $H$  — произвольное множество натуральных чисел, и пусть

$$f(q) = \sum_{n \geq 0} p(\langle H \rangle, n) q^n, \quad (1.2.1)$$

$$f_d(q) = \sum_{n \geq 0} p(\langle H \rangle (\leq d), n) q^n. \quad (1.2.2)$$

Тогда при  $|q| < 1$  справедливы равенства

$$f(q) = \prod_{n \in H} (1 - q^n)^{-1}, \quad (1.2.3)$$

$$f_d(q) = \prod_{n \in H} (1 + q^n + \dots + q^{dn}) = \prod_{n \in H} (1 - q^{(d+1)n}) (1 - q^n)^{-1}. \quad (1.2.4)$$

**З а м е ч а н и е.** Эквивалентность этих двух форм для  $f_d(q)$  следует из формулы суммы членов конечной геометрической прогрессии:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^r = \frac{1 - x^{r+1}}{1 - x}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Проведем доказательство (1.2.3) и (1.2.4) сначала формально, а потом обоснуем его аналитически. Перенумеруем все элементы множества  $H$ :  $H = \{h_1, h_2, h_3, \dots\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \prod_{n \in H} (1 - q^n)^{-1} &= \prod_{n \in H} (1 + q^n + q^{2n} + q^{3n} + \dots) = \\ &= (1 + q^{h_1} + q^{2h_1} + q^{3h_1} + \dots) \times \\ &\times (1 + q^{h_2} + q^{2h_2} + q^{3h_2} + \dots) (1 + q^{h_3} + q^{2h_3} + q^{3h_3} + \dots) \dots \\ &\dots = \sum_{a_1 \geq 0} \sum_{a_2 \geq 0} \sum_{a_3 \geq 0} \dots q^{a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + \dots}; \end{aligned}$$

заметим, что показатель степени при  $q$  адекватен разбиению  $(h_1^{a_1} h_2^{a_2} h_3^{a_3} \dots)$ . Поэтому в последней сумме  $q^n$  присутствует однократно для каждого разбиения  $n$  на части, взятые из  $H$ . Следовательно,

$$\prod_{n \in H} (1 - q^n)^{-1} = \sum_{n \geq 0} p(\langle H \rangle, n) q^n.$$

Доказательство (1.2.4) совпадает с доказательством (1.2.3), с той лишь разницей, что бесконечные геометрические прогрессии заменяются на конечные:

$$\begin{aligned} \prod_{n \in H} (1 + q^n + q^{2n} + \dots + q^{dn}) &= \\ &= \sum_{d \geq a_1 \geq 0} \sum_{d \geq a_2 \geq 0} \sum_{d \geq a_3 \geq 0} \dots q^{a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + \dots} = \\ &= \sum_{n \geq 0} p(\langle H \rangle (\leq d), n) q^n. \end{aligned}$$

Если теперь взглянуть на приведенные выше процедуры как на операции со сходящимися бесконечными произведениями, то перемножение бесконечного числа рядов требует все-таки некоторого обоснования. Простейшая процедура состоит в усечении бесконечного произведения до конечного:  $\prod_{i=1}^n (1 - q^{h_i})^{-1}$ . Такое усеченное произведение порождает те разбиения, части которых находятся среди чисел  $h_1, h_2, \dots, h_n$ . Это перемножение корректно, поскольку в нем участвует лишь конечное число абсолютно сходящихся рядов. Предположим теперь, что  $q$  — действительное число,  $0 < q < 1$ ; тогда, если  $M = h_n$ , то

$$\sum_{j=0}^M p(\langle H \rangle, j) q^j \leq \prod_{i=1}^n (1 - q^{h_i})^{-1} \leq \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^{h_i})^{-1} < \infty.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм  $\sum_{j=0}^M p(\langle H \rangle, j) q^j$  является ограниченной возрастающей последовательностью и, значит, должна сходиться. С другой стороны,

$$\sum_{j=0}^{\infty} p(\langle H \rangle, j) q^j \geq \prod_{i=1}^n (1 - q^{h_i})^{-1} \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^{h_i})^{-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{\infty} p(\langle H \rangle, j) q^j = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^{h_i})^{-1} = \prod_{n \in H} (1 - q^n)^{-1}.$$

Аналогичное обоснование может быть дано и для доказательства формулы (1.2.4).

**С л е д с т в и е 1.2** (Эйлер). При всех  $n$  выполняется равенство  $p(\mathcal{O}, n) = p(\mathcal{D}, n)$ .

Доказательство. По теореме 1.1

$$\sum_{n \geq 0} p(\mathcal{O}, n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})^{-1},$$

$$\sum_{n \geq 0} p(\mathcal{D}, n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

Теперь

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n})}{(1 - q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n-1}}. \quad (1.2.5)$$

Поэтому

$$\sum_{n \geq 0} p(\mathcal{O}, n) q^n = \sum_{n \geq 0} p(\mathcal{D}, n) q^n;$$

а поскольку представление функции степенным рядом единственно, видим, что  $p(\mathcal{O}, n) = p(\mathcal{D}, n)$  для всех  $n$ .

Следствие 1.3 (Глайшер). Пусть  $N_d$  есть множество натуральных чисел, не делящихся на  $d$ . Тогда

$$p(\langle N_{d+1} \rangle, n) = p(\langle N \rangle (\leq d), n)$$

для всех  $n$

Доказательство. По теореме 1.1

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} p(\langle N \rangle (\leq d), n) q^n &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{(d+1)n})}{(1 - q^n)} = \\ &= \prod_{\substack{n=1 \\ (d+1) \nmid n}}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^n)} = \sum_{n \geq 0} p(\langle N_{d+1} \rangle, n) q^n, \end{aligned}$$

и требуемое следует, как и ранее.

Имеется целый ряд результатов, подобных следствиям 1.2 и 1.3; мы обратимся к ним в главах 7 и 8, где приведены более глубокие теоремы такой природы.

### 1.3. Графическое представление разбиений

Другим эффективным элементарным инструментом изучения разбиений служит их графическое представление. Каждому разбиению  $\lambda$  ставится в соответствие его *графическое представление*  $\mathcal{G}_\lambda$ , или, иначе, граф Феррера. Точечный граф Феррера разбиения  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  представляет собой множество целочисленных точек  $(i, j)$  на плоскости, для которого

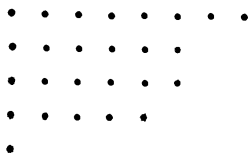
$$(i, j) \in \mathcal{G}_\lambda \Leftrightarrow 0 \geq i \geq -n + 1, \quad 0 \leq j \leq \lambda_{i+1} - 1^*).$$

---

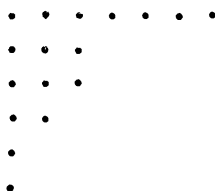
<sup>\*</sup>) Здесь и далее автор использует нестандартное обозначение координат:  $i$  — вертикальная ось,  $j$  — горизонтальная. (Прим. перев.)

Поясним это определение некоторыми примерами.

Графическое представление разбиения  $8 + 6 + 6 + 5 + 1$  имеет вид

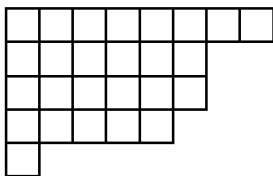


Графическое представление разбиения  $7 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1$  имеет вид



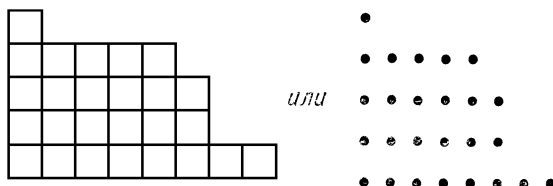
Заметим, что  $i$ -я строка графического представления разбиения  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  содержит ровно  $\lambda_i$  точек.

Отметим также, что имеется несколько эквивалентных способов задания графического представления. Так, некоторые авторы используют единичные квадраты вместо точек, так что графическое представление разбиения  $8 + 6 + 6 + 5 + 1$  принимает вид



Такое представление весьма полезно при рассмотрении приложений разбиений к плоским разбиениям или диаграммам Юнга (см. гл. II).

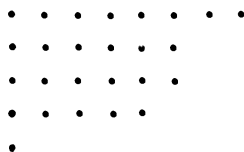
Некоторые авторы предпочитают перевернутые представления (они бы сказали — правильно повернутые), которые, например, в случае  $8 + 6 + 6 + 5 + 1$  выглядят так:



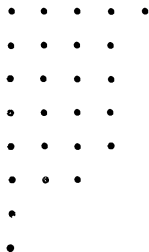
Будем придерживаться первого варианта, поскольку в большинстве классических текстов используется именно первое из указанных в этом параграфе представлений.

**О п р е д е л е н и е 1.8.** Разбиение  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$  называется *сопряженным разбиением* разбиения  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  или просто *сопряжением разбиения*  $\lambda$ , если  $\lambda'_i$  равно числу частей разбиения  $\lambda$ , не меньших чем  $i$ .

И это формальное определение легче понять, используя графическое представление. Из определения видим, что сопряжение разбиения  $8 + 6 + 6 + 5 + 1$  представляет собой разбиение  $5 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 1 + 1$ . Графическое представление разбиения  $8 + 6 + 6 + 5 + 1$  имеет вид



Сопряжение этого разбиения получается подсчетом точек в столбцах этого представления; графическое представление сопряжения получается отражением этого графа относительно главной диагонали. Таким образом, граф сопряженного разбиения имеет вид



Заметим, что использование графического представления в данном случае дает не только простой способ получения самого сопряжения разбиения  $\lambda$ , но также прямо показывает, что сопряженное разбиение  $\lambda'$  есть всегда разбиение того же числа, разбиением которого является и разбиение  $\lambda$ , т. е. что  $\sum \lambda_i = \sum \lambda'_i$ . Помимо того, явно, что сопряжение есть инволюция разбиений всякого целого в том смысле, что сопряжение сопряжения разбиения  $\lambda$  есть снова разбиение  $\lambda$ .

Докажем теперь несколько теорем о разбиениях, используя графическое представление.

**Теорема 1.4.** Число разбиений числа  $n$  не более чем с  $t$  частями равно числу разбиений числа  $n$ , в которых нет частей, превосходящих  $t$ .

**Доказательство.** Мы можем установить взаимно однозначное соответствие между двумя классами разбиений при сопряжении, просто отображая каждое разбиение на его сопряженное. Такое отображение, очевидно, является взаимно однозначным; рассматривая графическое представление, видим, что при сопряжении условие «не более  $t$  частей» переходит в условие «нет частей, превосходящих  $t$ », и наоборот.

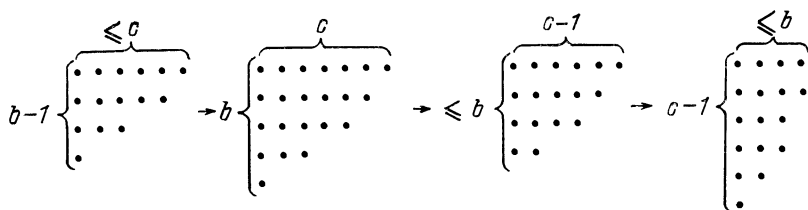
В качестве примера выпишем разбиения числа 6 на не более чем 3 части и разбиения числа 6 на части, не превосходящие 3, помещая в одной строке взаимно сопряженные разбиения:

6	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$5 + 1$	$2 + 1 + 1 + 1 + 1$
$4 + 2$	$2 + 2 + 1 + 1$
$4 + 1 + 1$	$3 + 1 + 1 + 1$
$3 + 3$	$2 + 2 + 2$
$3 + 2 + 1$	$3 + 2 + 1$
$2 + 2 + 2$	$3 + 3$

Полезная сама по себе теорема 1.4 показывает, как графическое представление используется для получения важной информации. Несколько более изощренное использование этой техники можно наблюдать в следующих двух теоремах.

**Теорема 1.5.** Число разбиений числа  $a$  с ровно  $b-1$  частями, не превосходящими  $c$ , равно числу разбиений числа  $a-b$  с  $c-1$  частями, не превосходящими  $b$ .

**Доказательство.** Рассмотрим графическое представление типичного разбиения первого типа и преобразуем это разбиение следующим образом: добавим новую строку из  $c$  точек, затем удалим первый столбец (который теперь имеет  $b$  точек) и произведем сопряжение полученного разбиения:



Сразу видно, что такое последовательное преобразование представляет собой взаимно однозначное соответствие между этими



двумя типами разбиений и, следовательно, доказывает утверждение теоремы.

В качестве примера рассмотрим случай  $a = 14$ ,  $b = 5$ ,  $c = 4$ :

$$4 + 4 + 1 + 1 \rightarrow 3 + 3 + 3$$

$$4 + 3 + 2 + 1 \rightarrow 4 + 3 + 2$$

$$4 + 2 + 2 + 2 \rightarrow 5 + 2 + 2$$

$$3 + 3 + 3 + 1 \rightarrow 4 + 4 + 1$$

$$3 + 3 + 2 + 2 \rightarrow 5 + 3 + 1$$

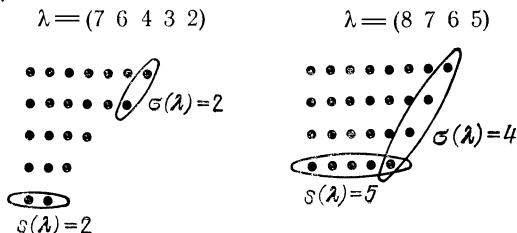
Мы завершаем эту главу одним из действительно замечательных достижений американской математики девятнадцатого века: доказательством Франклина пентагональной теоремы Эйлера. Заслуга Франклина состояла в доказательстве лежандровской комбинаторной интерпретации числовой теоремы Эйлера. Саму пентагональную теорему приводим как следствие 1.7, а следствием 1.8 показываем пользу теоремы 1.6 для вычислений.

**Т е о р е м а 1.6.** Пусть  $p_e(\mathcal{D}, n)$  (соответственно  $p_0(\mathcal{D}, n)$ ) — число разбиений  $n$  на четное (соответственно нечетное) число различных частей. Тогда

$$p_e(\mathcal{D}, n) - p_0(\mathcal{D}, n) = \begin{cases} (-1)^m, & \text{если } n = \frac{1}{2} m(3m \pm 1), \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

**До к а з а т е л ь с т в о.** Мы попытаемся установить взаимно однозначное соответствие между разбиениями, перечисляемыми функцией  $p_e(\mathcal{D}, n)$ , и разбиениями, перечисляемыми функцией  $p_0(\mathcal{D}, n)$ . Для большинства целых  $n$  наша попытка увенчается успехом; однако, если  $n$  является одним из пятиугольных чисел  $\frac{1}{2}m(3m \pm 1)$ , то это и составит единственный исключительный случай.

Введем два параметра разбиения  $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_r)$ :  $s(\lambda) = \lambda_r$  (наименьшая часть разбиения  $\lambda$ ) и  $\sigma(\lambda)$  — наибольшее  $j$ , для которого  $\lambda_j = \lambda_1 - j + 1$  (при  $\lambda \in \mathcal{D}$  — число членов в монотонно убывающей последовательности с разницей между соседними членами, равной 1, начинающейся с  $\lambda_1$  и состоящей из первых частей разбиения  $\lambda$ ). Графически эти параметры описываются очень просто:



Преобразуем разбиение следующим образом.

С л у ч а й 1.  $s(\lambda) \leq \sigma(\lambda)$ . В этом случае увеличиваем на единицу каждую из  $s(\lambda)$  наибольших частей  $\lambda$  и отбрасываем наименьшую часть. Таким образом,

$$\lambda = (7 \ 6 \ 4 \ 3 \ 2) \rightarrow \lambda' = (8 \ 7 \ 4 \ 3),$$

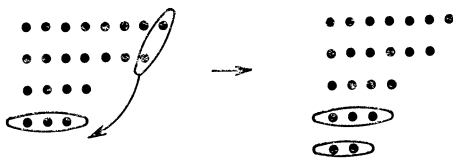
т. е.



С л у ч а й 2.  $s(\lambda) > \sigma(\lambda)$ . В этом случае, наоборот, уменьшаем на единицу каждую из  $\sigma(\lambda)$  наибольших частей  $\lambda$  и образуем новую наименьшую часть величины  $\sigma(\lambda)$ . Таким образом,

$$\lambda = (8 \ 7 \ 4 \ 3) \rightarrow (7 \ 6 \ 4 \ 3 \ 2),$$

т. е.



Описанная процедура в обоих случаях меняет четность числа частей разбиения; замечая, что к разбиению можно применить лишь один из этих двух случаев, видим, что такое отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие. Однако имеются определенные разбиения, для которых это отображение не работает, например,  $\lambda = (8 \ 7 \ 6 \ 5)$ . К нему нужно было бы применять случай 2, но получаемое посредством него новое разбиение уже содержит одинаковые части, т. е. не принадлежит нашему множеству  $\mathcal{D}$ . Итак, случай 2 не работает, когда разбиение имеет  $r$  частей,  $\sigma(\lambda) = r$ ,  $s(\lambda) = r + 1$ , и в этом случае само разбиваемое число, очевидно, равно

$$(r + 1) + (r + 2) + \dots + 2r = \frac{1}{2} r (3r + 1).$$

С другой стороны, случай 1 не работает, когда разбиение имеет  $r$  частей,  $\sigma(\lambda) = r$ ,  $s(\lambda) = r$ , а само разбиваемое число, очевидно, равно

$$r + (r + 1) + \dots + (2r - 1) = \frac{1}{2} r (3r - 1).$$

Стало быть, если  $n$  не является пятиугольным числом, то  $p_e(\mathcal{D}, n) = p_0(\mathcal{D}, n)$ , а если  $n = \frac{1}{2}r(3r \pm 1)$ , то  $p_e(\mathcal{D}, n) = p_0(\mathcal{D}, n) + (-1)^r$ .

С л е д с т в и е 1.7 (пентагональная теорема Эйлера).

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)} (1 + q^m) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)}. \quad (1.3.1) \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что согласно теореме 1.6

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)} &= \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)} + \sum_{m=-1}^{-\infty} (-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)} = \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m+1)} = \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)} (1 + q^m) = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(\mathcal{D}, n) - p_0(\mathcal{D}, n)) q^n. \end{aligned}$$

Для полноты доказательства нужно еще показать, что

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(\mathcal{D}, n) - p_0(\mathcal{D}, n)) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

Теперь

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{a_1=0}^1 \sum_{a_2=0}^1 \sum_{a_3=0}^1 \dots (-1)^{a_1+a_2+a_3+\dots} q^{a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 + \dots},$$

как и в доказательстве формулы (1.2.4). Заметим, что каждое разбиение с различными частями подсчитывается с весом  $(-1)^{a_1+a_2+a_3+\dots}$ , который равен  $+1$ , если это разбиение имеет

четное число частей, и  $-1$  в случае нечетного числа частей. Следовательно,

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) &= \sum_{a_1=0}^1 \sum_{a_2=0}^1 \sum_{a_3=0}^1 \dots (-1)^{a_1+a_2+a_3+\dots} q^{a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 + \dots} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(\mathcal{D}, n) - p_o(\mathcal{D}, n)) q^n, \end{aligned}$$

и тем самым имеем требуемое.

**С л е д с т в и е 1.8** (Эйлер). *Если  $n > 0$ , то*

$$\begin{aligned} p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + \\ + p(n-7) + \dots + (-1)^m p\left(n - \frac{1}{2}m(3m-1)\right) + \\ + (-1)^m p\left(n - \frac{1}{2}m(3m+1)\right) + \dots = 0, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

где  $p(M) = 0$  для всех отрицательных  $M$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $a_n$  обозначает левую часть равенства (1.3.2). Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)} (1 + q^m) \right] = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = 1, \end{aligned}$$

где предпоследнее равенство сразу следует из (1.2.3) и следствия 1.7. Поэтому  $a_n = 0$  для  $n > 0$ .

Следствие 1.8 представляет собой весьма эффективный алгоритм для вычисления  $p(n)$  (см. гл. 14).

### Задачи

1. (Саббарао). Число разбиений  $n$ , в которых части встречаются дважды, трижды или по пять раз, равно числу разбиений  $n$  на части, сравнимые с 2, 3, 6, 9, 10 по модулю 12.

2. Число разбиений  $n$ , в которых могут повторяться только нечетные части, равно числу разбиений  $n$ , в которых нет части, встречающейся более чем три раза.

3. Число разбиений  $n$ , в которых могут повторяться только части,  $\neq 0 \pmod{2^m}$ , равно числу разбиений  $n$ , в которых нет частей, встречающихся более чем  $2^{m+1} - 1$  раз.

4. (Рамануджан). Число разбиений  $n$  с единственной наименьшей частью и наибольшей частью, не превосходящей удвоенной наименьшей части, равно числу разбиений  $n$ , в которых наибольшая часть нечетна, а наименьшая — больше половины наибольшей части.

5. Пусть  $P_1(r; n)$  — число разбиений  $n$  на части, либо четные и не сравнимые с  $4r - 2 \pmod{4r}$ , либо нечетные и сравнимые с  $2r - 1$  или  $4r - 1 \pmod{4r}$ . Пусть  $P_2(r; n)$  — число разбиений  $n$ , в которых могут повторяться лишь четные части, а все нечетные части сравнимы с  $2r - 1$  по модулю  $2r$ . Тогда  $P_1(r; n) = P_2(r; n)$ .

Пояснение к задачам 6, 7. Мак-Магон ввел «модулярные» разбиения. Для данных положительных целых  $k$  и  $n$  существуют (согласно алгоритму Евклида) такие целые  $h \geq 0$  и  $0 < j \leq k$ , что  $n = kh + j$ . Модулярные разбиения представляют собой модификацию графа Феррера, в которой  $n$  представляется строкой из  $h$  чисел  $k$  и одного числа  $j$ . Так, представление по модулю 2 разбиения  $8+8+7+7+6+5+2$  имеет вид

2 2 2 2  
2 2 2 2  
2 2 2 1  
2 2 2 1  
2 2 2  
2 2 1  
2

Заметим, что обычный граф Феррера есть модулярное представление по модулю 1.

6. Пусть  $W_1(r, m, n)$  — число разбиений  $n$  на  $m$  частей, каждая больше 1, среди которых ровно  $r$  нечетных частей, и эти части различны. Пусть  $W_2(r, m, n)$  — число разбиений  $n$  с  $2m$  как наибольшей частью, ровно  $r$  нечетными частями и эти части различны. Тогда  $W_1(r, m, n) = W_2(r, m, n)$  (используйте модулярное представление таких разбиений по модулю 2).

7. Пусть  $P_3(r, n)$  — число разбиений  $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s)$  числа  $n$ , что если  $\lambda_i$  нечетно, то  $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2r - 1$  ( $1 \leq i \leq s$ ,  $\lambda_{s+1} = 0$ ). Тогда  $P_2(r, n) = P_3(r, n)$  (определение  $P_2(r; n)$  см. в задаче 5). (Использовать модулярное представление этих разбиений по модулю 2.)

8. (Сильвестр). Число разбиений  $n$  с различными нечетными частями равно числу разбиений  $n$ , которые являются самосопряженными (т. е. совпадают со своим сопряжением).

9. (Мак-Магон). Пусть  $M_1(n)$  — число разбиений  $n$  на части,  $>1$ , в которых два последовательных целых не могут оба входить в качестве частей. Пусть  $M_2(n)$  — число разбиений  $n$ , в которых нет однократно входящей части. Тогда  $M_1(n) = M_2(n)$ .

10. (Мак-Магон). Пусть  $M_3(n)$  — число разбиений  $n$  на части, не сравнимые с 1 или 5 по модулю 6. Тогда  $M_2(n) = M_3(n)$  (определение  $M_2(n)$  см. в задаче 9).

11. (Эйлер). Абсолютное значение излишка числа разбиений  $n$  с нечетным числом частей над числом разбиений  $n$  с четным числом частей равно числу разбиений  $n$  на различные нечетные части.

### Замечания

По материалу этой главы рекомендуются книги: [4, 8, 12, 17, 22, 24]. Результаты Эйлера по большей части находятся в [9]. Теорема Глейшера (следствие 1.3) приведена в [11]. Теорему 1.5 можно найти в фундаментальной работе Сильвестра [28] (см. также [25]). Доказательство Франклина пентагональной теоремы приведено в [10] (см. также [26, 5]). Рекуррентные соотношения (типа следствия 1.8) и последние обзоры приведены соответственно в разделах Р 56 и Р 02 в [16]. Задача 1 — см. [27]; 4 — [2]; 5, 7 — [3]; 6 — [6, 17]; 9, 10 — [1]; 11 — [28].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Andrews G. E. (1967a). A generalization of a partition theorem of MacMahon. — *J. Combinatorial Theory* **3**, p. 100—101.
2. Andrews G. E. (1967b). Enumerative proofs of certain  $q$ -identities. — *Glasgow Math. J.* **8**, p. 33—40.
3. Andrews G. E. (1970). Note on a partition theorem. — *Glasgow Math. J.* **11**, p. 108—109.
4. Andrews G. E. (1971). *Number Theory*. — Saunders, Philadelphia.
5. Andrews G. E. (1972). Two theorems of Gauss and allied identities proved arithmetically. — *Pacific. J. Math.* **41**, 563—578.
6. Andrews G. E. (1974). Applications of basic hypergeometric functions. — *S. I. A. M. Rev.* **16**, p. 441—484.
7. Bender E. A. (1974). A lifting theorem for formal power series. — *Proc. Amer. Math. Soc.* **42**, p. 16—22.
8. Comtet L. (1974). *Advanced Combinatorics*. — D. Reidel, Dordrecht.
9. Euler L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum*, Chapter 16. — Marcum—Michaellem Bousquet, Lausannae.
10. Franklin F. (1881). Sur le developpement du produit infini  $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots$ . *Comptes Rendus* **82**, p. 448—450.
11. Glaisher J. W. L. (1883). A theorem in partitions. — *Messenger of Math.* **12**.
12. Hardy G. H., Wright E. M. (1960). *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed. — Oxford Univ. Press, London and New York.
13. Hickerson D. R. (1973). Identities relating the number of partitions into an even and odd number of parts. — *J. Combinatorial Theory* **A15**, p. 351—353.
14. Hickerson D. R. (1974). A partition identity of the Euler type. — *Amer. Math. Monthly* **81**, p. 627—629.
15. Knutson D. (1972). A lemma on partitions. — *Amer. Math. Monthly* **79**.
16. LeVeque W. J. (1974). *Reviews in Number Theory*, Vol. 4. — Amer. Math. Soc. Providence., R. I.
17. MacMahon P. A. (1916). *Combinatory Analysis*, Vol. 2. — Cambridge Univ. Press, London and New York (reprinted by Chelsea, New York, 1960).
18. MacMahon P. A. (1923). The theory of modular partitions. — *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **21**, p. 197—204.
19. Moore E. (1974a). Generalized Euler-type partition identities. — *J. Combinatorial Theory* **A17**, p. 78—83.
20. Moore E. (1974b). Partitions with parts appearing a specified number of times. — *Proc. Amer. Math. Soc.* **46**, p. 205—210.
21. Netto E. (1927). *Lehrbuch der Kombinatorik*, 2nd ed. — Teubner, Leipzig (reprinted by Chelsea, New York, 1958).
22. Ostmann H. H. (1956). *Additive Zahlentheorie*, 2 vols. — Springer, Berlin.
23. Rademacher H. (1973). *Topics in Analytic Number Theory*. — Springer, Berlin.
24. Riordan J. (1958). *An Introduction to Combinatorial Analysis*. — Wiley, New York. (Русский перевод: Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М.: Иностранная литература, 1963).
25. Starcher G. W. (1930). On identities arising from solutions of  $q$ -difference equations and some interpretations in number theory. — *Ann. J. Math.* **53**.
26. Subbarao M. V. (1971a). Combinatorial proofs of some identities. — *Proc. Washington State Univ. Conf. Number Theory*, pp. 80—91.
27. Subbarao M. V. (1971b). On a partition theorem of MacMahon — Andrews. — *Proc. Amer. Math. Soc.* **27**, p. 449—450.
28. Sylvester J. J. (1882—1884). A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion. — *Amer. J. Math.* **5**, p. 251—330; 334—336 (or pp. 1—83 of *The Collected Mathematical Papers of J. J. Sylvester*, Vol. 4., Cambridge Univ. Press, London and New York, 1912; reprinted by Chelsea, New York, 1974).

## РЯДЫ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

### 2.1. Введение

Эта глава посвящена выявлению плодотворных взаимосвязей между теоремами о разбиениях и некоторыми элементарными методами оперирования с рядами и произведениями. Вопросы, связанные со сходимостью, возникающие так же, как и в первой главе, здесь оказываются не более трудными, чем любые другие.

Будем сейчас рассматривать  $p(S, m, n)$  — число разбиений  $n$ , принадлежащих множеству  $S$  и имеющих  $m$  частей. Рассмотрение этой величины приводит к производящей функции двух переменных вида

$$f_S(z; q) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p(S, m, n) z^m q^n = \sum_{\lambda \in S} z^{\#(\lambda)} q^{\sigma(\lambda)},$$

где  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  — разбиение,  $\#(\lambda) = r$  — число частей разбиения  $\lambda$  и  $\sigma(\lambda) = \lambda_1 + \dots + \lambda_r$ . Этот двойной ряд является абсолютно сходящимся, если  $|z| < |q|^{-1} > 1$ ; в этом легко убедиться, доказывая (так же, как и теорему 1.1), что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p(\mathcal{P}, m, n) z^m q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - zq^n)^{-1},$$

где  $\mathcal{P}$  — множество всех разбиений.

В действительности, слегка модифицируя доказательство теоремы 1.1, можно показать, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p(\ll H \gg, m, n) z^m q^n = \prod_{n \in H} (1 - zq^n)^{-1}, \quad (2.1.1)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p(\ll H \gg (\leq d), m, n) z^m q^n = \prod_{n \in H} (1 - z^{d+1} q^{(d+1)n}) (1 - zq^n)^{-1}. \quad (2.1.2)$$

Помимо  $\#(\lambda)$  — числа разбиений  $\lambda$  — мы время от времени будем интересоваться и другими параметрами разбиений, а значит, и другими типами производящих функций разбиений от многих переменных. Все это обосновывает и наш общий интерес

к рассмотрению рядов и произведений от двух (или более) переменных. В следующем параграфе излагается элементарная техника получения многих тождеств с рядами и произведениями, выводится ряд важных классических теорем, таких, например, как тождество Якоби. Как станет ясно из § 2.3, результаты § 2.2 оказываются весьма полезными при выработке тождеств с разбиениями. Однако при чтении можно пропустить § 2.2 и сразу читать § 2.3, обращаясь лишь по мере надобности к формулировкам теорем § 2.2. Для читателя, интересующегося решением задач о разбиениях посредством преобразований рядов, первые шесть примеров в конце этой главы представляют хороший тест на овладение техникой, используемой в § 2.2.

## 2.2. Элементарные тождества с рядами и произведениями

Начнем с теоремы, принадлежащей Коши, которая, как мы увидим, окажется основным инструментом получения всех остальных результатов этого параграфа.

**Т е о р е м а 2.1.** Пусть  $|q| < 1$ ,  $|t| < 1$ ; тогда

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1}) t^n}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-atq^n)}{(1-tq^n)}. \quad (2.2.1)$$

**З а м е ч а н и е.** Мы будем стараться по возможности избавлять формулировки наших теорем от специальных обозначений. Однако для доказательств представляется вполне целесообразным использование следующих стандартных сокращений:

$$(a)_n = (a; q)_n = (1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1}),$$

$$(a)_{\infty} = (a; q)_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n,$$

$$(a)_0 = 1.$$

Можно определить  $(a)_n$  для всех действительных чисел  $n$  по правилу

$$(a)_n = \frac{(a)_{\infty}}{(aq^n)_{\infty}}.$$

Ряд в (2.2.1) представляет собой пример базисного гипергеометрического ряда. Изучение базисных рядов (или, иначе,  $q$ -рядов, или рядов Эйлера) составляет обширную ветвь анализа, к которой мы будем лишь прикасаться в этой книге. На большинство теорем этого параграфа можно смотреть как на элементарные результаты теории базисных гипергеометрических рядов. Теорема 2.1 известна как « $q$ -аналог биномиального ряда»; если



в ней положить  $a = q^\alpha$ , где  $\alpha$  — натуральное число, то (2.2.1) формально стремится к

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha + n - 1}{n} t^n = (1 - t)^{-\alpha}, \quad q \rightarrow 1^-.$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$F(t) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - atq^n)}{(1 - tq^n)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n, \quad (2.2.2)$$

где  $A_n = A_n(a, q)$ . Заметим, что  $A_n$  существует, поскольку бесконечное произведение равномерно сходится при фиксированных  $a$  и  $q$  в области  $|t| \leq 1 - \varepsilon$ ; следовательно, это выражение определяет функцию от  $t$ , аналитическую в области  $|t| < 1$ .

Теперь

$$(1 - t)F(t) = (1 - at) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - atq^n)}{(1 - tq^n)} = (1 - at) \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - atq^{n+1})}{(1 - tq^{n+1})} = \\ = (1 - at)F(tq). \quad (2.2.3)$$

Ясно, что  $A_0 = F(0) = 1$ , и, приравнявая коэффициенты при  $t^n$  в крайних частях равенства (2.2.3), видим, что

$$A_n - A_{n-1} = q^n A_n - a q^{n-1} A_{n-1},$$

или

$$A_n = \frac{(1 - a q^{n-1})}{(1 - q^n)} A_{n-1}. \quad (2.2.4)$$

Раскрывая рекуррентность (2.2.4), находим, что

$$A_n = \frac{(1 - a q^{n-1})(1 - a q^{n-2}) \dots (1 - a) A_0}{(1 - q^n)(1 - q^{n-1}) \dots (1 - q)} = \frac{(a)_n}{(q)_n}.$$

Подставляя это значение в (2.2.2), получаем теорему.

Эйлером были обнаружены два следующих случая теоремы 2.1. Каждое из этих тождеств имеет прямую связь с разбиениями, указанную в задаче 17 в конце этой главы.

**Следствие 2.2 (Эйлер).** При  $|t| < 1$ ,  $|q| < 1$  выполняются следующие тождества:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - tq^n)^{-1}, \quad (2.2.5)$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n q^{n(n-1)/2}}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + tq^n). \quad (2.2.6)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Равенство (2.2.5) сразу следует из (2.2.1), если в последнем положить  $a = 0$ . Для вывода (2.2.6) заменим в (2.2.1)  $a$  на  $a/b$  и  $t$  на  $bz$ ; следовательно, для  $|bz| < 1$  имеем

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b-a)(b-aq) \dots (b-aq^{n-1}) z^n}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-azq^n)}{(1-bzq^n)}. \quad (2.2.7)$$

Полагая  $b = 0$ ,  $a = -1$  в (2.2.7), получаем (2.2.6).

Следующий результат представляет собой фундаментальное преобразование Гейне, которое служит инструментом доказательства четырех следующих за ним следствий.

**С л е д с т в и е 2.3** (Гейне). При  $|q| < 1$ ,  $|t| < 1$ ,  $|b| < 1$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1})(1-b)(1-bq) \dots (1-bq^{n-1}) t^n}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)(1-c)(1-cq) \dots (1-cq^{n-1})} = \\ = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{(1-bq^m)(1-atq^m)}{(1-cq^m)(1-tq^m)} \times \\ \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-c/b)(1-cq/b) \dots (1-cq^{n-1}/b)}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^{n-1})} \times \right. \\ \left. \times \frac{(1-t)(1-tq) \dots (1-tq^{n-1}) b^n}{(1-at)(1-atq) \dots (1-atq^{n-1})} \right\}. \end{aligned}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n t^n}{(q)_n (c)_n} &= \frac{(b)_{\infty}}{(c)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n t^n}{(q)_n} \cdot \frac{(cq^n)_{\infty}}{(bq^n)_{\infty}} = \\ &= \frac{(b)_{\infty}}{(c)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_n t^n}{(q)_n} \cdot \frac{(c/b)_m b^m q^{nm}}{(q)_m} = \\ &= \frac{(b)_{\infty}}{(c)_{\infty}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c/b)_m b^m}{(q)_m} \cdot \frac{(atq^m)_{\infty}}{(tq^m)_{\infty}} = \frac{(b)_{\infty} (at)_{\infty}}{(c)_{\infty} (t)_{\infty}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c/b)_m (t)_m b^m}{(q)_m (at)_m}. \end{aligned}$$

**С л е д с т в и е 2.4** (Гейне). Если  $|c| < |ab|$ ,  $|q| < 1$ , то

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)} \times \\ \times \frac{(1-b)(1-bq) \dots (1-bq^{n-1})(c/ab)^n}{(1-c)(1-cq) \dots (1-cq^{n-1})} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{(1-cq^m/a)(1-cq^m/b)}{(1-cq^m)(1-cq^m/ab)}. \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно следствию 2.3 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c/ab)^n}{(q)_n (c)_n} &= \frac{(b)_{\infty} (c/b)_{\infty}}{(c)_{\infty} (c/ab)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c/ab)_n b^n}{(q)_n} = \\ &= \frac{(b)_{\infty} (c/b)_{\infty}}{(c)_{\infty} (c/ab)_{\infty}} \cdot \frac{(c/a)_{\infty}}{(b)_{\infty}} = \frac{(c/a)_{\infty} (c/b)_{\infty}}{(c)_{\infty} (c/ab)_{\infty}}. \end{aligned}$$

Следствие 2.5 (Бейли). Если  $|q| < \min(1, |b|)$ , то

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)} \times \\ \times \frac{(1-b)(1-bq) \dots (1-bq^{n-1})(-q/b)^n}{(1-aq/b)(1-aq^2/b) \dots (1-aq^n/b)} = \\ = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{(1-aq^{2m+1})(1+q^{m+1})(1+aq^{2m+2}/b^2)}{(1-aq^{m+1}/b)(1+q^{m+1}/b)}. \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно следствию 2.3 (при замене  $a$  на  $b$ ) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n (a)_n (-q/b)^n}{(q)_n (aq/b)_n} &= \frac{(a)_{\infty} (-q)_{\infty}}{(aq/b)_{\infty} (-q/b)_{\infty}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q/b)_m (-q/b)_m a^m}{(q)_m (-q)_m} = \\ &= \frac{(a)_{\infty} (-q)_{\infty}}{(aq/b)_{\infty} (-q/b)_{\infty}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q^2/b^2; q^2)_m a^m}{(q^2; q^2)_m} = \\ &= \frac{(a)_{\infty} (-q)_{\infty} (aq^2/b^2; q^2)_{\infty}}{(aq/b)_{\infty} (-q/b)_{\infty} (a; q^2)_{\infty}} = \frac{(aq; q^2)_{\infty} (-q)_{\infty} (aq^2/b^2; q^2)_{\infty}}{(aq/b)_{\infty} (-q/b)_{\infty}}. \end{aligned}$$

Отметим, что следствие 2.4 обычно именуют как « $q$ -аналог теоремы Гаусса», а следствие 2.5 — как « $q$ -аналог теоремы Кумера».

Следствие 2.6. Если  $|q| < 1$ , то

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2-n} z^n}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)(1-z)(1-zq) \dots (1-zq^{n-1})} = \\ = \prod_{m=0}^{\infty} (1-zq^m)^{-1}, \quad (2.2.8) \end{aligned}$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2 \dots (1-q^n)^2} = \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^m)^{-1}. \quad (2.2.9)$$

**З а м е ч а н и е.** Равенство (2.2.8) принадлежит Коши, а равенство (2.2.9) — Эйлеру.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Прежде всего отметим, что (2.2.9) получается из (2.2.8), если в последнем положить  $z = q$ . В следствии 2.4 положим  $a = \alpha^{-1}$ ,  $b = \beta^{-1}$ ,  $c = z$ . Стало быть,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha-1)(\alpha-q)\dots(\alpha-q^{n-1})(\beta-1)(\beta-q)\dots(\beta-q^{n-1})z^n}{(q)_n(z)_n} = \frac{(z\alpha)_{\infty}(z\beta)_{\infty}}{(z)_{\infty}(z\alpha\beta)_{\infty}},$$

и если теперь в этом тождестве положить  $\alpha = \beta = 0$ , то получится (2.2.8).

**С л е д с т в и е 2.7.** Если  $|q| < 1$ , то

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1})q^{n(n+1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{m=1}^{\infty} (1-aq^{2m-1})(1+q^m).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В следствии 2.5 положим  $b = \beta^{-1}$ . Отсюда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(\beta-1)(\beta-q)\dots(\beta-q^{n-1})(-q)^n}{(q)_n(aq\beta)_n} = \frac{(aq; q^2)_{\infty}(-q)_{\infty}(aq^2\beta^2; q^2)_{\infty}}{(aq\beta)_{\infty}(-q\beta)_{\infty}}.$$

Положив теперь в этом тождестве  $\beta = 0$ , получаем требуемое.

Следующий результат — тождество Якоби — можно рассматривать как следствие следствия 2.2, однако он настолько важен сам по себе, что мы выделяем его в отдельную теорему.

**Т е о р е м а 2.8.** При  $z \neq 0$ ,  $|q| < 1$  выполняется тождество

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+2})(1 + zq^{2n+1})(1 + z^{-1}q^{2n+1}). \quad (2.2.10)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для  $|z| > |q|$ ,  $|q| < 1$  имеем

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) &\stackrel{(2.2.6)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m q^{m^2}}{(q^2; q^2)_m} = \frac{1}{(q^2; q^2)_{\infty}} \sum_{m=0}^{\infty} z^m q^{m^2} (q^{2m+2}; q^2)_{\infty} = \\ &= \frac{1}{(q^2; q^2)_{\infty}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m q^{m^2} (q^{2m+2}; q^2)_{\infty} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\text{поскольку } (q^{2m+2}; q^2)_\infty = 0 \text{ при отрицательных } m) = \\
&= \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m q^{m^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r q^{r^2+2mr+r}}{(q^2; q^2)_r} = \\
&= \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{-r} q^r}{(q^2; q^2)_r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{(m+r)^2} z^{m+r} = \\
&= \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-q/z)^r}{(q^2; q^2)_r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} z^m = \\
&= \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty (-q/z; q^2)_\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} z^m.
\end{aligned}$$

Это и есть требуемый результат. Заметим, что абсолютная сходимость имеет место везде, где  $|z| > |q|$ ,  $|q| < 1$ . Однако полный результат теоремы получается либо посредством аналитического продолжения, либо повторным проведением этого рассуждения с  $z^{-1}$  вместо  $z$ .

С л е д с т в и е 2.9. Если  $|q| < 1$ , то

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(2k+1)n(n+1)/2-in} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(2k+1)n(n+1)/2-in} (1 - q^{(2n+1)i}) = \\
&= \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{(2k+1)(n+1)}) (1 - q^{(2k+1)n+i}) (1 - q^{(2k+1)(n+1)-i}). \quad (2.2.11)
\end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В (2.2.10), заменяя  $q$  на  $q^{k+1/2}$  и полагая  $z = -q^{(k+1)/2-i}$ , сразу получаем равенство крайних выражений в (2.2.11). Теперь

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(2k+1)n(n+1)/2-in} (1 - q^{(2n+1)i}) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(2k+1)n(n+1)/2-in} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(2k+1)n(n-1)/2+in} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(2k+1)n(n+1)/2-in} + \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^n q^{(2k+1)n(n+1)/2-in} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(2k+1)n(n+1)/2-in}.
\end{aligned}$$

Заметим, что следствие 2.9 приводит к следствию 1.2, когда  $k = i = 1$ , и тем самым получаем

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{3n+3}) (1 - q^{3n+1}) (1 - q^{3n+2}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

С л е д с т в и е 2.10 (Гаусс).

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - q^m)}{(1 + q^m)}, \quad (2.2.12)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2m})}{(1 - q^{2m-1})}. \quad (2.2.13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (2.2.10) при  $z = -1$  имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = (q^2; q^2)_{\infty} (q; q^2)_{\infty} (q; q^2)_{\infty} = (q)_{\infty} (q; q^2)_{\infty} = \frac{(q)_{\infty}}{(-q)_{\infty}},$$

где последнее равенство следует из (1.2.5). Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2} = \frac{1}{2} (q)_{\infty} (-q)_{\infty} (-1)_{\infty} = \\ &= (q)_{\infty} (-q)_{\infty} (-q)_{\infty} = (q^2; q^2)_{\infty} (-q)_{\infty} = (q^2; q^2)_{\infty} / (q; q^2)_{\infty}, \end{aligned}$$

где вновь последнее равенство следует из (1.2.5).

Этот параграф богат выкладками и беден комментариями. Важность теоремы 2.1 проявится во всей полноте, когда из нее последуют существенные результаты о разбиениях. Читателю предоставляется возможность попрактиковаться в используемой здесь технике во многих задачах в конце этой главы.

### 2.3. Приложения к разбиениям

Докажем здесь четыре теоремы о разбиениях, используя либо сами результаты, либо методы § 2.2. Завершаем мы этот параграф «квадратами Дюрфи», которые позволяют получить (2.2.9) из чисто комбинаторных соображений. Начнем с одной интерпретации следствия 2.9.

**Т е о р е м а 2.11.** Пусть  $\mathcal{D}(k, i)$  обозначает все те разбиения с различными частями, в которых каждая часть сравнима с  $0, \pm i \pmod{2k+1}$ . Пусть  $p_e(\mathcal{D}(k, i), n)$  (соответственно  $p_0(\mathcal{D}(k, i), n)$ ) обозначает число разбиений числа  $n$  из  $\mathcal{D}(k, i)$

с четным (соответственно нечетным) числом частей. Тогда

$$\begin{aligned} p_e(\mathcal{D}(k, i), n) - p_0(\mathcal{D}(k, i), n) = \\ = \begin{cases} (-1)^m, & \text{если } n = (k \mp 1/2)m(m+1) \pm im, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Доказательство.** Доказательство в точности аналогично доказательству следствия 1.7. Здесь требуемый результат получается приравниванием коэффициентов в обеих частях равенства (2.2.11).

**Теорема 2.12 (Сильвестр).** Пусть  $A_k(n)$  обозначает число таких разбиений  $n$  на нечетные части, в которых имеется ровно  $k$  различных частей (одинаковые части допускаются). Пусть  $B_k(n)$  обозначает число тех разбиений  $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_r)$ , в которых последовательность  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  составима ровно из  $k$  несмыкающихся последовательностей, каждая из которых состоит либо из одного элемента, либо из нескольких последовательно возрастающих на единицу целых чисел. Тогда  $A_k(n) = B_k(n)$  для всех  $k$  и  $n$ .

**Замечание.** Прежде всего отметим, что эта теорема Сильвестра есть уточнение теоремы Эйлера (следствие 1.2), поскольку

$$p(\mathcal{O}, n) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(n), \quad p(\mathcal{D}, n) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(n).$$

Сильвестром было получено чисто графическое доказательство этого результата. Наше рассуждение (принадлежащее Рамамани и Венкатачалингару) иллюстрирует, как взаимодействие комбинаторики и формальных рядов облегчает доказательство.

Точный смысл  $A_k(n)$  и  $B_k(n)$  ясно просматривается из следующего примера:  $A_3(14) = 7$ , поскольку эти разбиения суть  $(1^2 3 9)$ ,  $(1^2 5 7)$ ,  $(1 3^2 7)$ ,  $(1^4 3 7)$ ,  $(1 3 5^2)$ ,  $(1^3 3^2 5)$ ,  $(1^6 3 5)$ ;  $B_3(14) = 7$ , поскольку эти разбиения суть  $(1 3 10)$ ,  $(1 4 9)$ ,  $(2 4 8)$ ,  $(1 5 8)$ ,  $(2 5 7)$ ,  $(1 2 4 7)$ ,  $(1 3 4 6)$ .

**Доказательство.** Заметим, что метод теоремы 1.1, применяемый для доказательства (1.2.3), можно распространить на доказательство того факта, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_k(n) a^k q^n &= \prod_{j=1}^{\infty} (1 + aq^{2j-1} + aq^{2(2j-1)} + aq^{3(2j-1)} + \dots) = \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{aq^{2j-1}}{1 - q^{2j-1}} \right) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - (1-a)q^{2j-1})}{(1 - q^{2j-1})} = \frac{((1-a)q; q^2)_{\infty}}{(q; q^2)_{\infty}} = \\ &= ((1-a)q; q^2)_{\infty} (-q)_{\infty}, \quad (2.3.1) \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из теоремы Эйлера (1.2.5).

Нелегко сразу выписать производящую функцию от двух переменных для  $B_k(n)$ . Однако ситуация упрощается, если перейти к сопряженным разбиениям. Действительно, все сопряженные разбиения  $\lambda'$  распадаются на два непересекающихся класса: 1) если 1 является частью  $\lambda$ , то  $\lambda'$  есть разбиение  $n$ , в котором наибольшая часть единственна, каждое натуральное число, меньшее чем наибольшая часть, присутствует и ровно  $k - 1$  из этих частей присутствуют более чем однократно; 2) если 1 не является частью  $\lambda$ , то  $\lambda'$  есть разбиение  $n$ , в котором наибольшая часть повторяется, каждое натуральное число, меньшее чем наибольшая часть, присутствует и ровно  $k$  частей присутствуют более чем однократно.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_k(n) a^k q^n &= 1 + \sum_{N=1}^{\infty} a q^N \prod_{j=1}^{N-1} (q^j + a q^{2j} + a q^{3j} + \dots) + \\
 &+ \sum_{N=1}^{\infty} (a q^{2N} + a q^{3N} + \dots) \prod_{j=1}^{N-1} (q^j + a q^{2j} + a q^{3j} + \dots) = \\
 &= 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{a q^N}{1 - q^N} \prod_{j=1}^{N-1} q^j \left( 1 + \frac{a q^j}{1 - q^j} \right) = \\
 &= 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(1 - (1 - a)) q^{N(N+1)/2} ((1 - a) q)_{N-1}}{(q)_N} = \\
 &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{((1 - a))_N a^{N(N+1)/2}}{(q)_N} \stackrel{(2.7)}{=} ((1 - a) q; q^2)_{\infty} (-q)_{\infty} = \\
 &\stackrel{(2.3.1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_k(n) a^k q^n.
 \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при  $a^k q^n$  в крайних членах этой цепочки равенств, заключаем, что  $A_k(n) = B_k(n)$  при всех  $k, n$ .

Рассмотрим теперь один аналитический подход к теореме 1.5; вообще, аналитические доказательства требуют меньшей изобретательности и обеспечивают меньшее понимание, чем доказательства комбинаторные.

**Аналитическое доказательство теоремы 1.5.** Если через  $p_{b,c}(a - c)$  обозначить число разбиений



первого типа из теоремы 1.5, то эта теорема утверждает, что  $p_{b,c}(a-c) = p_{c,b}(a-b)$ . Пусть теперь

$$\sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} p_{b,c}(a) x^b y^c q^a =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x y^n \prod_{j=1}^n (1 + x q^j + x^2 q^j + x^3 q^{2j} + \dots) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x y^n}{(x q)_n}.$$

Следовательно, если

$$f(x, y) = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} p_{b,c}(a-c) x^b y^c q^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x y^n q^n}{(x q)_n},$$

то нам для получения требуемого результата надо лишь показать, что

$$f(x, y) - 1 + x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x y^n q^n}{(x q)_n} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0)_n (q)_n (y q)_n}{(q)_n (x q)_n} =$$

$$\stackrel{(2.3)}{=} x \frac{(q)_{\infty}}{(x q)_{\infty} (y q)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)_n (y q)_n q^n}{(q)_n} = x \frac{(q)_{\infty}}{(x q)_{\infty} (y q)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y q)_n (x)_n q^n}{(q)_n (0)_n} =$$

$$= x \frac{(q)_{\infty}}{(x q)_{\infty} (y q)_{\infty}} \frac{(x)_{\infty} (y q^2)_{\infty}}{(q)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q)_n x^n}{(q)_n (y q^2)_n} \stackrel{(2.3)}{=} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(y q)_{n+1}}.$$

Стало быть,

$$f(x, y) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(y q)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(y q)_n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(y q)_n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(y q)_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (1-y q^n)}{(y q)_n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y x^n q^n}{(y q)_n} = f(y, x).$$

В качестве третьего примера рассмотрим другое уточнение теоремы Эйлера (следствие 1.2), принадлежащее Файну.

**Теорема 2.13.** Число разбиений  $n$  на различные части с наибольшей частью  $k$  равно числу тех разбиений  $n$  на нечетные части, в которых  $2k+1$  равно наибольшей части плюс удвоенному числу частей.

**Доказательство.** Комбинаторные рассуждения типа тех, которые использовались в трех предыдущих доказательствах, показывают, что теорема Файна эквивалентна равенству

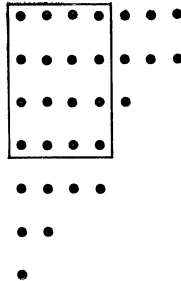
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j+1} q^{2j+1}}{(t q; q^2)_{j+1}} = t q \sum_{j=0}^{\infty} (-q)_j q^{t j}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 tq \sum_{j=0}^{\infty} (-q)_j q^j t^j &= tq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q^2; q^2)_j q^j t^j}{(q)_j} = \\
 &= tq (q^2; q^2)_{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j q^j}{(q)_j} \frac{1}{(q^{2j+2}; q^2)_{\infty}} = \\
 &\stackrel{(2.2.5)}{=} tq (q^2; q^2)_{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j q^j}{(q)_j} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{2jm+2m}}{(q^2; q^2)_m} = \\
 &= tq (q^2; q^2)_{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{2m}}{(q^2; q^2)_m} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j q^{j(2m+1)}}{(q)_j} = \\
 &\stackrel{(2.2.5)}{=} tq (q^2; q^2)_{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{2m}}{(q^2; q^2)_m (tq^{2m+1})_{\infty}} = \\
 &= \frac{tq (q^2; q^2)_{\infty}}{(tq)_{\infty}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tq; q^2)_m (tq^2; q^2)_m q^{2m}}{(q^2; q^2)_m} = \\
 &= \frac{tq (q^2; q^2)_{\infty}}{(tq)_{\infty}} \frac{(tq^2; q^2)_{\infty} (tq^3; q^2)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q^2; q^2)_m t^m q^{2m}}{(q^2; q^2)_m (tq^3; q^2)_m} = \\
 &\stackrel{(2.3)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{m+1} q^{2m+1}}{(tq; q^2)_{m+1}}.
 \end{aligned}$$

Мы завершаем эту главу введением квадратов Дюрфи и их использованием для получения нового доказательства (2.2.9).

Комбинаторное доказательство равенства (2.2.9). Каждому разбиению  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  можно сопоставить параметр  $d(\lambda)$  как число тех  $\lambda_j$ , для которых  $\lambda_j \geq j$ . Посмотрим, что измеряет  $d(\lambda)$  в графическом представлении  $\lambda$ . Предположим, что  $\lambda = (1 \ 2 \ 4^{25} \ 7^2)$ ; тогда  $d(\lambda) = 4$ , графическое представление имеет вид



и, как легко заметить,  $d(\lambda)$  равно стороне наибольшего квадрата из точек, содержащегося в графическом представлении  $\lambda$ . Этот квадрат называется *квадратом Дюрфи* (в честь В. Дюрфи), а  $d(\lambda)$  называется стороной квадрата Дюрфи.

Из графического представления явствует, что если  $\lambda \vdash n$  и  $d(\lambda) = s$ , то разбиение  $\lambda$  может быть единственным образом представлено в форме  $(s^s) + \lambda' + \lambda''$ , где  $(s^s)$  представляет точки из квадрата Дюрфи,  $\lambda'$  представляет точки, расположенные ниже квадрата Дюрфи (а значит, некоторое разбиение с частями, не превосходящими  $s$ ), и, наконец,  $\lambda''$  представляет сопряжение точек, расположенных правее квадрата Дюрфи, и, значит,  $\lambda''$  также является некоторым разбиением с частями, не превосходящими  $s$ .

В нашем примере разбиение  $\lambda = (1\ 2\ 4^{25}\ 7^2)$  единственным образом записывается в форме  $(4^4) + (1\ 2\ 4) + (2^2 3)$ . Поскольку разбиения с частями, не превосходящими  $s$ , порождаются посредством

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^s)} = \frac{1}{(q)_s}$$

(см. теорему 1.1), видим, что множество всех разбиений со стороной квадрата Дюрфи, равной  $s$ , перечисляется посредством

$$q^{s^2} \frac{1}{(q)_s} \cdot \frac{1}{(q)_s} = \frac{q^{s^2}}{(q)_s^2}.$$

Стало быть,

$$\frac{1}{(q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{s^2}}{(q)_s^2}.$$

### Задачи

1. Следующее обобщение следствия 2.3 выполняется при каждом целом  $k \geq 1$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q^k)_n (b)_{kn} t^n}{(q^k; q^k)_n (c)_{kn}} = \frac{(b)_\infty (at; q^k)_\infty}{(c)_\infty (t; q^k)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c/b)_n (t; q^k)_n b^n}{(q)_n (at; q^k)_n}.$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_{2n} t^{2n}}{(q^2; q^2)_n} = \frac{(-t)_\infty}{(-t)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(b)_m t^m}{(q)_m (-t)_m}.$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t; q^2)_n b^n}{(q)_n} = \frac{(btq; q^2)_\infty}{(bq; q^2)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t; q^2)_m b^m}{(q^2; q^2)_m (btq; q^2)_m}.$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b; q^2)_n t^n}{(q)_n (atb; q^2)_n} = \frac{(at; q^2)_\infty (bt; q^2)_\infty}{(t; q^2)_\infty (abt; q^2)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a; q^2)_m (b; q^2)_m (tq)^m}{(q^2; q^2)_m (bt; q^2)_m}.$$

$$5. (1+a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{(-q)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2} a^n}{(-q)_n (-aq)_n}.$$

$$6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{m^2} x^m}{(y; q^2)_{m+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{xq}{y}; q^2 \right)_m y^m.$$

7. Тождество, используемое в доказательстве теоремы 2.13, есть специальный случай тождества из задачи 4.

$$8. \sum_{m=0}^{\infty} (-a^{-1})_m (aq)^m - \sum_{m=0}^{\infty} (a^{-1})_m (-aq)^m = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(aq)^{2m+1}}{(q; q^2)_{m+1}}.$$

9. Тождество из задачи 8 может быть использовано для доказательства еще одной теоремы Файна:

$$U_{2r+1}(n) = V_{2r+1}(n) + V_{2r}(n),$$

где  $U_{2r+1}(n)$  есть число разбиений  $n$  с нечетными частями и наибольшей частью  $2r+1$  и где  $V_s(n)$  есть число тех разбиений  $n$  на различные части, в которых наибольшая часть минус число частей равна  $s$ .

10. Можно доказать, что

$$\begin{aligned} 1 - x \sum_{n=1}^{\infty} (xq)_{n-1} (xq)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} q^{n(n+1)/2}}{(xq)_n} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (q^{n(3n-1)/2} x^{3n-1} + q^{n(3n+1)/2} x^{3n}), \end{aligned}$$

показывая, что каждый из этих рядов  $s(x, q)$  удовлетворяет условиям

$$s(x, q) = 1 - x^2 q - q^2 x^3 s(xq, q), \quad s(0, q) = 1.$$

11. Пентагональная теорема Эйлера есть следствие задачи 10.

12. Задачу 10 можно решить и чисто комбинаторно. При этом подходе нужно учитывать не только, что число  $n$  является разбиваемым, но также и  $m$  — сумму наибольшей части и числа частей. Инвариантность  $m$  относительно преобразований доказательства теоремы 1.2 обеспечивает обоснование второго равенства в задаче 10.

В своем последнем письме к Харди Рамануджан рассматривал несколько семейств функций, которые он называл «эта-подобными». Четыре из них таковы:

$$\begin{aligned} f_0(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q)_n}, & \varphi_0(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} (-q; q^2)_n, \\ \psi_0(q) &= \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+1)(n+2)/2} (-q)_n, & F_0(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q; q^2)_n}. \end{aligned}$$

В задачах 13 и 14 предлагается доказать приведенные соотношения между этими функциями.

$$13. \quad \psi_0(q) = q \left( \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{4n^2+4n}}{(q^4; q^4)_n} + F_0(q^2) - 1.$$

$$14. \quad f_0(q) - \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q)_n} = 2\varphi_0(-q^2).$$

$$15. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(-z)_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (q; q^2)_n z^{2n}.$$

16. Если в теореме 2.1 заменить  $q$  на  $q^2$  и тогда заменить  $t$  на  $tq^2$  и  $a$  на  $-aq$ , то результирующее тождество можно вывести из задачи 6 в гл. 1.

17. Если в следствии 2.2  $t$  заменить на  $tq$ , то полученные равенства допускают простое комбинированное доказательство. Равенство (2.2.5) может быть доказано рассмотрением разбиений  $n$  с  $t$  частями; равенство (2.2.6) может быть доказано рассмотрением разбиений  $n$  с  $t$  различными частями.

18. Разбиение  $\lambda$  будем называть *сильвестровым*, если наименьшая часть, присутствующая четное число раз (0 — четное число), четна. Для любого множества натуральных чисел  $T$  определяем  $S(T; m, n)$  как число сильвестровых разбиений  $n$  на  $m$  частей так, что нет повторяющихся элементов из  $T$ . Тогда

$$\sum_{m, n \geq 0} S(T; m, n) x^m q^n = \frac{\prod_{k \in T} (1 - x^2 q^{2k})}{\prod_{j=1}^{\infty} (1 - x q^j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1} q^{n(2n-1)}}{(-xq)_{2n}}.$$

19. Число несильвестровых разбиений  $n$  с нечетным числом частей равно числу несильвестровых разбиений  $n$  с четным числом частей.

$$20. \quad \sum_{m, n \geq 0} (-1)^m S(T; m, n) q^n = \prod_{k \in T} (1 - q^{2k}) \left( \frac{1}{(-q)_{\infty}} - 1 \right).$$

### Замечания

Первоисточник теоремы 1.2 неизвестен; ее приписывают Эйлеру (Харди (1940), стр. 223). Гейне первым систематически изучал этот тип рядов, в связи с чем именно ему часто приписывается эта теорема; однако Коши доказал этот результат в 1843 году (см. Коши (1893), стр. 45). Следствие 2.2 действительно принадлежит Эйлеру (1748). Следствия 2.3 и 2.4 принадлежат Гейне (1847). Бейли (1941) и Даум (1942) независимо доказали следствие 2.5. Следствие 2.6 принадлежит Коши (1893). Следствие 2.7, по-видимому, принадлежит Лебегу (1840). Следствие 2.8 есть знаменитое тождество Якоби (1829); доказательство, приведенное в этой главе, было независимо получено Эндрюсом (1965) и Менонем (1965). Равенства (2.2.12) и (2.2.13) обычно приписываются либо Якоби (1829), либо Гауссу (1866). Теорема 2.12 представляет собой расширение теоремы Эйлера (следствие 1.2), принадлежащее Сильвестру (1884—1886); приведенное здесь доказательство по существу принадлежит Рамамани и Венкатачалингару (1972) (см. также Эндрюс (1974)). Теорема 2.13 есть неопубликованный результат Файна (1954) (см. также Эндрюс (1966b)). Использование квадратов Дюрфи интенсивно изучалось в [8, 9].

Соотношения между рядами и произведениями с достаточной полнотой не представлены ни в одной книге. Ряд элементарных задач обсуждается в [7] (см. также [10]). Элементы теории этих рядов можно найти в [11, 12, 21, 22, 32]. Большинство последней литературы по этому вопросу указано в разделе Р60 в [28].

Задачи 1—3—[4]; задача 4 — [3]; задача 5 — [2, 4]; задача 6 — [3]; задача 8 — это тождество принадлежит Файну (1954) и приведено в [3]; задача 9 — [3, 18]; задача 10 — [31, 3, 19]; задача 12 — [33, 9]; задачи 13, 14 — [35, 2]; задача 15 — [14]; задача 16 — [11]; задача 18 — [6]. В этой работе сильвестровы разбиения именуются «флешами» в соответствии с терминологией самого Сильвестра. Поскольку Сильвестр был одним из «рекордсменов» по введению новых математических терминов, представляется вполне уместным этот тип разбиений назвать «сильвестровым». Задачи 19, 20 — [6].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Andrews G. E. (1965). A simple proof of Jacobi's triple product identity. — Proc. Amer. Math. Soc. **16**, p. 333—334.
2. Andrews G. E. (1966a). On basic hypergeometric series, mock theta functions, and partitions, I. — Quart. J. Math. Oxford Ser. **17**, p. 132—143.
3. Andrews G. E. (1966b). On basic hypergeometric series, mock theta functions, and partitions, II. — Quart. J. Math. Oxford Ser. **17**, p. 132—143.
4. Andrews G. E. (1966c).  $q$ -Identities of Auluck, Carlitz and Rogers. — Duke Math. J. **33**, p. 575—582.
5. Andrews G. E. (1966d). On generalizations of Euler's partition theorem. — Michigan Math. J. **13**, p. 491—498.
6. Andrews G. E. (1970). On a partition problem of J. J. Sylvester. — J. London Math. Soc. (2), **2**, p. 571—576.
7. Andrews G. E. (1971a). Number Theory. — Saunders, Philadelphia.
8. Andrews G. E. (1971b). Generalization of the Durfee square. — J. London Math. Soc. (2) **3**, p. 563—570.
9. Andrews G. E. (1972a). Two theorems of Gauss and allied identities proved arithmetically. — Pacific J. Math. **41**, p. 563—578.
10. Andrews G. E. (1972b). Partition identities. — Advances in Math. **9**, p. 10—51.
11. Andrews G. E. (1974). Applications of basic hypergeometric functions. — SIAM Rev. **16**, p. 441—484.
12. Bailey W. N. (1935). Generalized Hypergeometric Series. — Cambridge Univ. Press, London and New York (reprinted by Hafner, New York, 1964).
13. Bailey W. N. (1941). A note on certain  $q$ -identities. Quart. — J. Math. Oxford Ser. **12**, p. 173—175.
14. Carlitz L. (1967). Problem 66—9. A pair of identities. — SIAM Rev. **9**, p. 254—256.
15. Cauchy A. (1893). Oeuvres, Ser. 1, Vol. 8. — Gauthier—Villars, Paris.
16. Daum J. A. (1942). The basic analog of Kummer's theorem. — Bull. Amer. Math. Soc. **48**, p. 711—713.
17. Euler L. (1748). Introductio in analysin infinitorum, Chapter 16. — Marcum-Michaellem Bousquet, Lausannae.
18. Fine N. J. (1948). Some new results on partitions. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **34**, p. 616—618.
19. Fine N. J. (1954). Some Basic Hypergeometric Series and Applications. — Unpublished monograph.
20. Gauss C. F. (1866). Werke, Vol. 3. Konigliche Gesellschaft der Wissenschaften. — Göttingen.
21. Hahn W. (1949). Beiträge zur Theorie der Heineschen Reihen, Die 24 Integrale der hypergeometrischen  $q$ -differenzengleichung. Das  $q$ -analogen der Laplace Transformation. — Math. Nachr. **2**, p. 340—379.

22. Hahn W. (1950). Über die höheren Heineschen Reihen und eine einheitliche Theorie der sogenannten speziellen Funktionen. — *Math. Nachr.* **3**, p. 257—294.
23. Hardy G. H. (1940). *Ramanujan*. — Cambridge Univ. Press, London and New York (reprinted by Chelsea, New York).
24. Hardy G. H., Wright E. M. (1960). *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed. — Oxford Univ. Press, London and New York.
25. Heine E. (1847). Untersuchungen über die Reihe ... — *J. Reine Angew. Math.* **34**, p. 285—328.
26. Jacobi C. G. J. (1829). *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. — Regiomonti, Fratrum Bornträger (reprinted in *Gesammelte Werke*, Vol. I, pp. 49—239; Reimer, Berlin, 1881).
27. Lebesgue V. A. (1840). Sommmation de quelques séries. — *J. Math. Pures Appl.* **5**, p. 42—71.
28. LeVeque, W. J. (1974). *Reviews in Number Theory*, Vol. 4. — Amer. Math. Soc. Providence, R. I.
29. Menon P. K. (1965). On Ramanujan's continued fraction and related identities. — *J. London Math. Soc.* **40**, p. 49—54.
30. Ramamani V., Venkatachaliengar K. (1972). On a partition theorem of Sylvester. — *Michigan Math. J.* **19**, p. 137—140.
31. Rogers L. J. (1916). On two theorems of combinatory analysis and some allied identities. — *Proc. London Math. Soc.* (2) **16**, p. 315—336.
32. Slater L. J. (1966). *Generalized Hypergeometric Functions*. — Cambridge Univ. Press, London and New York.
33. Subbarao M. V. (1971). Combinatorial proofs of some identities, — *Proc. Washington State Univ. Conf. Number Theory*, p. 80—91.
34. Sylvester J. J. (1884—1886). A constructive theory of partitions arranged in three acts, an interact, and an exodion. — *Amer. J. Math.* **5**, p. 251—330; **6**, p. 334—336 (or p. 1—83 of the *Collected Papers of J. J. Sylvester*, Vol. 4. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1912; reprinted by Chelsea, New York, 1974).
35. Watson G. N. (1936). The mock theta functions (2). — *Proc. London Math. Soc.* (2), **42**, p. 274—304.
- 36.\* Pólya G., Szegő G. (1964). *Aufgaben und Lehrätze aus der Analysis*. — Springer-Verlag, Berlin. (Русский перевод: Полня Г., Сергеев Г. Задачи и теоремы из анализа. — М.: Наука, 1978).

## РАЗБИЕНИЯ НА ОГРАНИЧЕННЫЕ ЧАСТИ И ПЕРЕСТАНОВКИ

### 3.1. Введение

В первых двух главах мы изучали различные задачи о разбиениях, привлекая для этого ряды и бесконечные произведения. Для приложений (например, в статистике) часто представляют интерес разбиения на ограниченные части, т. е. разбиения, в которых наибольшая часть не превосходит  $N$ , а общее число частей не превосходит  $M$  (ограниченные разбиения). Эта глава посвящена изучению таких разбиений. Изучение ограниченных разбиений приведет нас к многочленам Гаусса, которые в свою очередь приведут нас к некоторым вопросам о перестановках.

### 3.2. Производящая функция для ограниченных разбиений

Пусть  $p(N, M, n)$  обозначает число разбиений  $n$  не более чем на  $M$  частей, каждая из которых не превосходит  $N$ . Ясно, что

$$p(N, M, n) = 0, \quad \text{если } n > MN,$$

$$p(N, M, NM) = 1;$$

стало быть, производящая функция

$$G(N, M; q) = \sum_{n \geq 0} p(N, M, n) q^n$$

представляет собой многочлен от  $q$  степени  $NM$ .

**Т е о р е м а 3.1.** Пусть  $M, N \geq 0$ ; тогда

$$G(N, M; q) = \frac{(1 - q^{N+M})(1 - q^{N+M-1}) \dots (1 - q^{M+1})}{(1 - q^N)(1 - q^{N-1}) \dots (1 - q)} = \frac{(q)_{N+M}}{(q)_N (q)_M}. \quad (3.2.1)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обозначим через  $g(N, M; q)$  правую часть равенства (3.2.1); тогда

$$g(N, 0; q) = g(0, M; q) = 1 \quad (3.2.2)$$



и, кроме того,

$$\begin{aligned} g(N, M; q) - g(N, M-1; q) &= \\ &= \frac{(q)_{N+M-1}}{(q)_N (q)_M} [(1 - q^{N+M}) - (1 - q^M)] = \frac{(q)_{N+M-1}}{(q)_N (q)_M} q^M (1 - q^N) = \\ &= q^M \frac{(q)_{N+M-1}}{(q)_{N-1} (q)_M} = q^M g(N-1, M; q). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Заметим, что (3.2.2) и (3.2.3) однозначно определяют  $g(N, M; q)$  при всех неотрицательных целых  $M$  и  $N$  (это легко доказывается двойной индукцией по  $N$  и  $M$ ).

С другой стороны,

$$p(N, 0, n) = p(0, M, n) = \begin{cases} 1, & \text{если } N = M = n = 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (3.2.4)$$

поскольку лишь пустое разбиение нуля является единственным разбиением без положительных частей, а также является единственным разбиением, в котором число частей неположительно.

Равенство (3.2.4) означает, что

$$G(N, 0; q) = G(0, M; q) = 1. \quad (3.2.5)$$

Кроме того, величина  $p(N, M, n) - p(N, M-1, n)$  даст число разбиений  $n$  ровно на  $M$  частей, каждая из которых не превосходит  $N$ . Преобразуем каждое из этих разбиений, отбрасывая их единичные части и уменьшая на единицу все остальные части. Все таким образом полученные разбиения числа  $n - M$  имеют не более  $M$  частей, каждая из которых не превосходит  $N - 1$ . Поскольку описанное преобразование, очевидно, обратимо, то это устанавливает взаимно однозначное соответствие между разбиениями, перечисляемыми функцией  $p(N, M, n) - p(N, M-1, n)$ , и разбиениями, перечисляемыми функцией  $p(N-1, M, n-M)$ .

Следовательно,

$$p(N, M, n) - p(N, M-1, n) = p(N-1, M, n-M); \quad (3.2.6)$$

переводя (3.2.6) на язык производящих функций, получаем

$$G(N, M; q) - G(N, M-1; q) = q^M G(N-1, M; q). \quad (3.2.7)$$

Таким образом, поскольку функции  $g(N, M; q)$  и  $G(N, M; q)$  удовлетворяют одним и тем же начальным условиям ((3.2.2) и (3.2.5) соответственно) и одним и тем же рекуррентным соотношениям ((3.2.3) и (3.2.7) соответственно), то они должны совпадать. Стало быть,

$$G(N, M; q) = g(N, M; q) = \frac{(q)_{N+M}}{(q)_N (q)_M}.$$

### 3.3. Свойства многочленов Гаусса

Многочлены  $G(N, M; q)$ , появляющиеся в теореме 3.1, впервые изучались Гауссом и известны как многочлены Гаусса. В этом параграфе приводится ряд полезных формул для этих многочленов.

**О п р е д е л е н и е 3.1.** *Многочлен Гаусса* определяется по правилу:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{cases} (q)_n (q)_m^{-1} (q)_{n-m}^{-1}, & \text{если } 0 \leq m \leq n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что согласно теореме 3.1  $\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = G(N - M, M; q)$ , однако это равенство в данном параграфе не используется.

**Т е о р е м а 3.2.** *Пусть заданы целые  $0 \leq m \leq n$ . Многочлен Гаусса  $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$  есть многочлен степени  $m(n - m)$  от  $q$ , удовлетворяющий следующим соотношениям:*

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1, \quad (3.3.1)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n - m \end{bmatrix}, \quad (3.3.2)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n - 1 \\ m \end{bmatrix} + q^{n-m} \begin{bmatrix} n - 1 \\ m - 1 \end{bmatrix}, \quad (3.3.3)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n - 1 \\ m - 1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} n - 1 \\ m \end{bmatrix}, \quad (3.3.4)$$

$$\lim_{q \rightarrow 1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{n!}{m! (n - m)!} = \binom{n}{m}. \quad (3.3.5)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Равенства (3.3.1) и (3.3.2) следуют непосредственно из определения 3.1. Для (3.3.3) видим, что

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n - 1 \\ m \end{bmatrix} &= \frac{(q)_{n-1}}{(q)_m (q)_{n-m}} [(1 - q^n) - (1 - q^{n-m})] = \\ &= \frac{(q)_{n-1} q^{n-m} (1 - q^m)}{(q)_m (q)_{n-m}} = \frac{q^{n-m} (q)_{n-1}}{(q)_{m-1} (q)_{n-m}} = q^{n-m} \begin{bmatrix} n - 1 \\ m - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Равенство (3.3.4) следует из (3.3.3) при замене  $m$  на  $n - m$  и использовании (3.3.2).

Тот факт, что  $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$  есть многочлен от  $q$  степени  $m(n - m)$ , доказывается индукцией по  $n$  с использованием (3.3.1) и (3.3.4).

Наконец,

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{(1-q^n)}{(1-q^m)} \frac{(1-q^{n-1})}{(1-q^{m-1})} \dots \frac{(1-q^{n-m+1})}{(1-q)} = \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m(m-1) \dots 1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}. \end{aligned}$$

Часто многочлены Гаусса возникают в связи с определенными конечными произведениями.

**Т е о р е м а 3.3.**

$$(z)_N = \sum_{j=0}^N \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix} (-1)^j z^j q^{j(j-1)/2}, \quad (3.3.6)$$

$$(z)_N^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N+j-1 \\ j \end{bmatrix} z^j. \quad (3.3.7)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно теореме 2.1 имеем

$$\begin{aligned} (z)_N &= \frac{(z)_{\infty}}{(zq^N)_{\infty}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q^{-N})_j z^j q^{Nj}}{(q)_j} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-q^{-N})(1-q^{-N+1}) \dots (1-q^{-N+j-1}) z^j q^{Nj}}{(q)_j} = \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j q^{-Nj+j(j-1)/2} (1-q^N)(1-q^{N-1}) \dots (1-q^{N-j+1}) z^j q^{Nj}}{(q)_j} = \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{(q)_N}{(q)_j (q)_{N-j}} (-1)^j z^j q^{j(j-1)/2} = \sum_{j=0}^N \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix} (-1)^j z^j q^{j(j-1)/2}, \end{aligned}$$

что и дает (3.3.6).

Вновь согласно теореме 2.1 имеем

$$(z)_N^{-1} = \frac{(zq^N)_{\infty}}{(z)_{\infty}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q^N)_j z^j}{(q)_j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q)_{N+j-1}}{(q)_j (q)_{N-1}} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N+j-1 \\ j \end{bmatrix} z^j,$$

что и дает (3.3.7).

Имеется много других формул с многочленами Гаусса. Мы завершаем этот параграф, приводя здесь несколько наиболее полезных.

Т е о р е м а 3.4.

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} = \begin{cases} (q; q^2)_n, & \text{если } m = 2n, \\ 0, & \text{если } m \text{ нечетно;} \end{cases} \quad (3.3.8)$$

$$\begin{bmatrix} n+m+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^n q^j \begin{bmatrix} m+j \\ m \end{bmatrix} \quad \text{для } m, n \geq 0; \quad (3.3.9)$$

$$\sum_{k=0}^h \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ h-k \end{bmatrix} q^{(n-k)(h-k)} = \begin{bmatrix} m+n \\ h \end{bmatrix}; \quad (3.3.10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{r \geq 0} \begin{bmatrix} M-m \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N+m \\ m+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m+n+r \\ M+N \end{bmatrix} q^{(N-r)(M-r-m)} = \\ = \begin{bmatrix} m+n \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ N \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с (3.3.8) — тождества, важного при вычислении гауссовских сумм. Пусть  $f(m)$  обозначает левую часть равенства (3.3.8); тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m) z^m}{(q)_m} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^m}{(q)_j (q)_{m-j}} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=j}^{\infty} \frac{(-1)^j z^m}{(q)_j (q)_{m-j}} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{m+j}}{(q)_j (q)_m} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^j}{(q)_j} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(q)_m} \stackrel{(2.2.5)}{=} (-z)_{\infty}^{-1} (z)_{\infty}^{-1} = \\ &= (z^2; q^2)_{\infty}^{-1} \stackrel{(2.2.5)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(q^2; q^2)_n}. \end{aligned}$$

Равенство (3.3.8) теперь сразу следует после приравнивания коэффициентов при  $z^m$  в крайних членах этой цепочки равенств.

Равенство (3.3.9) докажем индукцией по  $n$ . Если  $n = 0$ , то равенство это принимает вид  $1 = 1$ . Предположим, что результат верен вплоть до  $n$ ; тогда согласно (3.3.4)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+m+2 \\ m+1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n+m+1 \\ m+1 \end{bmatrix} + q^{n+1} \begin{bmatrix} n+m+1 \\ m \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{j=0}^n q^j \begin{bmatrix} m+j \\ m \end{bmatrix} + q^{n+1} \begin{bmatrix} m+n+1 \\ m \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{n+1} q^j \begin{bmatrix} m+j \\ m \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для получения (3.3.10) ( $q$ -аналога тождества Чу — Вандермонда) приравняем коэффициенты при  $z^h$  в обеих частях тождества

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{m+n} \left[ \begin{matrix} m+n \\ h \end{matrix} \right] z^h (-1)^h q^{h(h-1)/2} &= (z)_{m+n} = (z)_n (zq^n)_m = \\ &= \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] z^k (-1)^k q^{k(k-1)/2} \sum_{i=0}^m \left[ \begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right] (-1)^i z^i q^{ni+i(i-1)/2} = \\ &= \sum_{h \geq 0} z^h (-1)^h q^{h(h-1)/2} \sum_{k \geq 0} \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} m \\ h-k \end{matrix} \right] q^{(n-k)(h-k)}. \end{aligned}$$

Вместо доказательства (3.3.11) докажем более общее равенство

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n (q^{-N})_n q^n}{(q)_n (c)_n (abq^{1-N}c^{-1})_n} = \frac{(c/a)_N (c/b)_N}{(c)_N (c/ab)_N}. \quad (3.3.12)$$

Равенство (3.3.12) было впервые доказано Джексоном и называется  $q$ -аналогом теоремы Саалшутца, равенство (3.3.12) сводится к (3.3.11) заменой  $a = q^{-M+m}$ ,  $b = q^{m+n+1}$ ,  $c = q^{m+1}$ .

Для получения (3.3.12) воспользуемся тождеством, легко выводимым из следствия 2.3:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n t^n}{(q)_n (c)_n} &\stackrel{(2.3)}{=} \frac{(b)_{\infty} (at)_{\infty}}{(c)_{\infty} (t)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c/b)_n (t)_n b^n}{(q)_n (at)_n} = \\ &= \frac{(b)_{\infty} (at)_{\infty}}{(c)_{\infty} (t)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t)_n (c/b)_n b^n}{(q)_n (at)_n} \stackrel{(2.3)}{=} \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \frac{(b)_{\infty} (at)_{\infty}}{(c)_{\infty} (t)_{\infty}} \cdot \frac{(c/b)_{\infty} (bt)_{\infty}}{(at)_{\infty} (b)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(abt/c)_n (b)_n (c/b)^n}{(q)_n (bt)_n} = \\ &= \frac{(c/b)_{\infty} (bt)_{\infty}}{(c)_{\infty} (t)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n (abt/c)_n (c/b)^n}{(q)_n (bt)_n} = \\ &= \frac{(c/b)_{\infty} (bt)_{\infty}}{(c)_{\infty} (t)_{\infty}} \cdot \frac{(abt/c)_{\infty} (c)_{\infty}}{(bt)_{\infty} (c/b)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c/a)_n (c/b)_n (abt/c)^n}{(q)_n (c)_n} = \\ &= \frac{(abt/c)_{\infty}}{(t)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c/a)_n (c/b)_n (abt/c)^n}{(q)_n (c)_n}. \quad (3.3.13) \end{aligned}$$

Домножим теперь крайние члены этой цепочки равенств на  $(t)_\infty/(abt/c)_\infty$  и приравняем коэффициенты при  $t^N$  с каждой стороны. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c/ab)_{N-n}}{(q)_n (c)_n (q)_{N-n}} = \frac{(c/a)_N (c/b)_N a^N b^N c^{-N}}{(q)_N (c)_N}. \quad (3.3.14)$$

Домножая здесь справа и слева на  $(q)_N a^{-N} b^{-N} c^N / (c/ab)_N$  и упрощая полученное выражение, получаем (3.3.12).

### 3.4. Перестановки и полиномиальные коэффициенты Гаусса

Многочлен Гаусса часто называют *q-биномиальным коэффициентом*, что обусловливается предельным переходом (3.3.5). В этом параграфе многочлены Гаусса применяются для изучения определенных типов задач о перестановках и естественно перейти к терминологии *q-полиномиальных коэффициентов*.

**О п р е д е л е н и е 3.2.** Для  $m_1, \dots, m_r \geq 0$  гауссовский полиномиальный коэффициент (*q-полиномиальный коэффициент*) определяется по правилу

$$\left[ \begin{matrix} m_1 + m_2 + \dots + m_r \\ m_1, m_2, \dots, m_r \end{matrix} \right] = \frac{(q)_{m_1+m_2+\dots+m_r}}{(q)_{m_1} (q)_{m_2} \dots (q)_{m_r}}. \quad (3.4.1)$$

Заметим, что

$$\left[ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} n \\ m, n-m \end{matrix} \right].$$

При  $r = 2$  теорема 3.1 говорит нам, что  $\left[ \begin{matrix} m_1 + m_2 \\ m_1, m_2 \end{matrix} \right]$  есть производящая функция для  $p(m_1, m_2, n)$  — числа разбиений  $n$  не более чем на  $m_2$  частей, каждая из которых не превосходит  $m_1$ .

Рассмотрим теперь иной тип математических объектов с той же самой перечислительной функцией  $p(m_1, m_2, n)$ .

**О п р е д е л е н и е 3.3.** *Мультимножеством* называется всякая совокупность с не обязательно различными элементами.

Для полной корректности нужно определить мультимножество как упорядоченную пару  $(M, f)$ , где  $M$  — множество, а  $f$  — функция из  $M$  в множество натуральных чисел; для каждого  $m \in M$  число  $f(m)$  называется *кратностью* элемента  $m$  в мультимножестве  $M$ . Когда  $M$  — конечное множество, скажем  $\{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ , мы пишем

$$(M, f) = \{m_1^{f(m_1)} m_2^{f(m_2)} \dots m_r^{f(m_r)}\}.$$

Начнем с рассмотрения перестановок мультимножеств (*перестановка* мультимножества  $(M, f)$  есть слово, в котором каждая

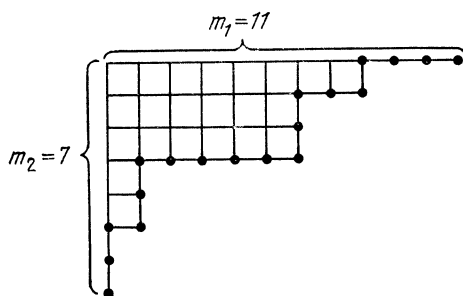
буква принадлежит  $M$ , и для каждого  $m \in M$  полное число вхождений  $m$  в слово равно  $f(m)$ ). Таким образом,  $3\ 2\ 1\ 2\ 2\ 3\ 2\ 1\ 1\ 2$  есть перестановка мультимножества  $\{1^3\ 2^5\ 3^2\}$ .

**О п р е д е л е н и е 3.4.** Пусть  $\text{inv}(m_1, m_2, \dots, m_r; n)$  обозначает число тех перестановок  $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{m_1+m_2+\dots+m_r}$  мультимножества  $\{1^{m_1} 2^{m_2} \dots r^{m_r}\}$ , в которых имеется ровно  $n$  пар  $(\xi_i, \xi_j)$  таких, что  $i < j$  и  $\xi_i > \xi_j$ .

**Т е о р е м а 3.5.**  $\text{inv}(m_1, m_2; n) = p(m_1, m_2, n)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Установим взаимно однозначное соответствие между перестановками, перечисляемыми функцией  $\text{inv}(m_1, m_2; n)$ , и разбиениями, перечисляемыми функцией  $p(m_1, m_2; n)$ .

Используем для этого «клеточное» графическое представление для графа Феррера разбиения с частями, не превосходящими 11, и не более чем семью частями (здесь  $8 + 6 + 6 + 1 + 1$ ):



Проведем путь, обозначаемый точками, начинающийся с правой верхней точки и движущийся налево и вниз: если путь идет вертикально, то пишем 2, а если горизонтально, то пишем 1. Поэтому последовательность, соответствующая такому пути, в нарисованном здесь графе имеет вид  $1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2$ .

Отметим, что число единиц, стоящих правее первой двойки, дает величину наибольшей части разбиения, число единиц направо от второй двойки дает вторую часть нашего разбиения и, вообще, число единиц направо от  $i$ -й двойки дает  $i$ -ю часть разбиения. Ясно, что такая связь между разбиениями и перестановками устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми перестановками мультимножества  $\{1^{m_1} 2^{m_2}\}$ , обладающими ровно  $n$  инверсиями, и всеми разбиениями числа  $n$  не более чем с  $m_2$  частями, каждая из которых не превосходит  $m_1$ . Поэтому  $\text{inv}(m_1, m_2; n) = p(m_1, m_2; n)$ .

Теорема 3.5 вместе с теоремой 3.1 влекут специальный случай  $r = 2$  следующего общего результата.

**Теорема 3.6.** Пусть  $r \geq 1$ ; тогда

$$\sum_{n \geq 0} \text{inv}(m_1, m_2, \dots, m_r; n) q^n = \left[ \begin{matrix} m_1 + m_2 + \dots + m_r \\ m_1, m_2, \dots, m_r \end{matrix} \right]. \quad (3.4.2)$$

**З а м е ч а н и е.** Эта теорема принадлежит Мак-Магону.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Проведем индукцию по  $r$ . При  $r = 1$  равенство (3.4.2) принимает вид  $1 = 1$ . При  $r = 2$  согласно теоремам 3.5 и 3.1 имеем

$$\sum_{n \geq 0} \text{inv}(m_1, m_2; n) q^n = \sum_{n \geq 0} p(m_1, m_2; n) q^n = \left[ \begin{matrix} m_1 + m_2 \\ m_1, m_2 \end{matrix} \right].$$

Отметим теперь следующий общий факт:

$$\begin{aligned} \text{inv}(m_1, \dots, m_r; n) &= \\ &= \sum_{j=0}^n \text{inv}(m_1 + \dots + m_r, m_r; j) \text{inv}(m_1, \dots, m_{r-1}; n - j). \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Чтобы доказать (3.4.3), рассмотрим те перестановки, в которых ровно  $j$  из  $n$  обращенных пар имеют  $r$  в качестве первого элемента. Простейший способ построения всех таких перестановок состоит в следующем: сначала возьмем перестановку мультимножества  $\{1^{m_1+m_2+\dots+m_{r-1}} 2^{m_r}\}$  с  $j$  инверсиями, далее заменим каждую двойку на  $r$ , а затем заменим  $m_1 + m_2 + \dots + m_{r-1}$  вхождений единицы на какую-нибудь перестановку мультимножества  $\{1^{m_1} 2^{m_2} \dots (r-1)^{m_{r-1}}\}$  с  $n - j$  инверсиями. Поскольку эти два выбора перестановок полностью независимы, то видим, что общее число перестановок мультимножества  $\{1^{m_1} 2^{m_2} \dots r^{m_r}\}$  с элементом  $r$ , входящим ровно в  $j$  инвертированных пар, есть в точности

$$\text{inv}(m_1 + \dots + m_r, m_r; j) \text{inv}(m_1, \dots, m_{r-1}; n - j).$$

Суммируя по всем  $j \geq 0$ , получаем (3.4.3).

Теперь довольно просто можно получить (3.4.2); формула, очевидно, верна при  $r = 1, 2$ ; предположим, что она верна вплоть до  $r$ ; тогда согласно (3.4.3) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \text{inv}(m_1, \dots, m_{r+1}; n) q^n &= \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{j=0}^n \text{inv}(m_1 + \dots + m_{r+1}, m_{r+1}; j) \text{inv}(m_1, \dots, m_r; n - j) \right] q^n = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \text{inv}(m_1 + \dots + m_{r+1}, m_{r+1}; j) q^j \sum_{k=0}^{\infty} \text{inv}(m_1, \dots, m_r; k) q^k = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{(q)_{m_1+\dots+m_{r+1}}}{(q)_{m_{r+1}}(q)_{m_1+\dots+m_r}} \cdot \frac{(q)_{m_1+\dots+m_r}}{(q)_{m_1}(q)_{m_2}\dots(q)_{m_r}} = \\
&= \frac{(q)_{m_1+\dots+m_{r+1}}}{(q)_{m_1}(q)_{m_2}\dots(q)_{m_{r+1}}} = \left[ \begin{matrix} m_1 + m_2 + \dots + m_{r+1} \\ m_1, m_2, \dots, m_{r+1} \end{matrix} \right].
\end{aligned}$$

Введем теперь иной параметр, связанный с перестановками мультимножеств.

**О п р е д е л е н и е 3.5.** Через  $\text{ind}(m_1, m_2, \dots, m_r; n)$  обозначаем число тех перестановок  $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{m_1+\dots+m_r}$  мультимножества  $\{1^{m_1} 2^{m_2} \dots r^{m_r}\}$ , для которых

$$\sum_{i=1}^{m_1+\dots+m_r-1} \chi(\xi_i) = n,$$

где  $\chi(\xi_i) = i$ , если  $\xi_i > \xi_{i+1}$ , и  $\chi(\xi_i) = 0$  в противном случае. Такая сумма называется *индексом интенсивности* \*) перестановки.

Таким образом, значение этого индекса перестановки  $1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2$  равно  $0 + 0 + 0 + 4 + 0 + 0 + 0 + 8 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 15 + 0 = 27$ .

Обратимся теперь к другому удивительному результату Мак-Магона.

**Т е о р е м а 3.7.** Пусть  $r \geq 1$ ; тогда

$$\sum_{n \geq 0} \text{ind}(m_1, m_2, \dots, m_r; n) q^n = \left[ \begin{matrix} m_1 + m_2 + \dots + m_r \\ m_1, m_2, \dots, m_r \end{matrix} \right]. \quad (3.4.4)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В действительности мы покажем, что

$$\frac{\sum_{n \geq 0} \text{ind}(m_1, m_2, \dots, m_r; n) q^n}{(q)_{m_1+m_2+\dots+m_r}} = \frac{1}{(q)_{m_1}(q)_{m_2}\dots(q)_{m_r}}. \quad (3.4.5)$$

Начнем с рассмотрения правой части (3.4.5). Согласно теореме 1.1 функция  $(q)_{m_i}^{-1}$  есть производящая функция для разбиений с частями, не превосходящими  $m_i$ , и согласно теореме 1.4 она же является производящей функцией и для разбиений не более чем с  $m_i$  частями. Каждому разбиению не более чем с  $m_i$  (положительными) частями соответствует разбиение ровно с  $m_i$  неотрицательными частями (с необходимым числом добавленных нулей). Следовательно, коэффициент при  $q^N$  в

$$\frac{1}{(q)_{m_1}(q)_{m_2}\dots(q)_{m_r}}$$

---

\*) В оригинале quater index. (Прим. перев.)



Т а б л и ц а 3.4.6

	$(\pi_\sigma)$	$\pi_0$	$\sigma$
0 0 0	3 0 0 0 0	2 0 0 0 0	2 1 1 1 2
3 0	2 1 1 1 2		
3 0 0	3 0 0 0 0	3 0 0 0 0	1 1 1 2 2
0 0	1 1 1 2 2		
2 1 0	2 1 0 0 0	2 1 0 0 0	1 1 1 2 2
0 0	1 1 1 2 2		
2 0 0	2 1 0 0 0	1 0 0 0 0	1 2 1 1 2
1 0	1 2 1 1 2		
1 0 0	2 1 0 0 0	1 1 0 0 0	2 1 1 1 2
2 0	2 1 1 1 2		
0 0 0	2 1 0 0 0	1 0 0 0 0	2 2 1 1 1
2 1	2 2 1 1 1		
1 1 1	1 1 1 0 0	1 1 1 0 0	1 1 1 2 2
0 0	1 1 1 2 2		
1 1 0	1 1 1 0 0	0 0 0 0 0	1 1 2 1 2
1 0	1 1 2 1 2		
1 0 0	1 1 1 0 0	0 0 0 0 0	1 2 2 1 1
1 1	1 2 2 1 1		

Рассмотрим этот процесс на примере:

$$\begin{array}{l}
 5 \ 3 \ 2 \ 2 \ 0 \\
 3'3'2'1' \rightarrow 5 \ 3 \ 3'3'2 \ 2 \ 2'1'0 \rightarrow 5 \ 3 \ 3'3'2 \ 2 \ 2'2''1'1''0. \\
 2''1''1''
 \end{array}$$

Здесь соответствующая перестановка, очевидно, имеет вид 1 1 2 2 1 1 2 3 2 3 3 1, применение которой влечет искомую таблицу:

$$\begin{array}{l}
 5 \ 3 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \rightarrow 5 \ 3 \ 2 \ 2 \ 0 \\
 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \ 3 \ 1 \rightarrow 3 \ 3 \ 2 \ 1 \\
 \phantom{1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \ 3 \ 1 \ \rightarrow} 2 \ 1 \ 1
 \end{array}$$

Чтобы убедиться, что мы имеем разбиение  $\pi = (A_1 A_2 \dots A_M)$  со строгими неравенствами между подходящими членами (определяемыми спусками в перестановке  $\sigma = (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_M)$ ), начнем с произвольного разбиения  $\pi_0 = (a_1 a_2 \dots a_M)$  и определим

$$\pi = (a_1 + \varphi_1, a_2 + \varphi_2, a_3 + \varphi_3, \dots, a_M + \varphi_M),$$

где  $\varphi_i$  — число спусков в  $\{\xi_i \xi_{i+1} \dots \xi_M\}$ . Заметим, что  $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_M = \chi(\xi_1) + \chi(\xi_2) + \dots + \chi(\xi_M)$  есть индекс интенсивности  $\sigma$ , поскольку в левой части этого равенства спуск  $\xi_1 > \xi_{i+1}$  подсчитывается ровно  $i$  раз.

Таким образом, наше отображение действительно устанавливает взаимно однозначное соответствие между таблицами (3.4.6), полная сумма элементов которых равна  $N$ , и упорядоченными парами  $\left(\begin{smallmatrix} \pi_0 \\ \sigma \end{smallmatrix}\right)$ , где  $\sigma$  — перестановка мультимножества  $\{1^{m_1} 2^{m_2} \dots r^{m_r}\}$  с индексом интенсивности  $g(\sigma)$ , а  $\pi_0$  — разбиение  $N - g$  не более чем с  $M$  частями.

Стало быть,

$$\sum' q^g \frac{1}{(q)_{m_1+m_2+\dots+m_r}} = \frac{1}{(q)_{m_1} (q)_{m_2} \dots (q)_{m_r}}. \quad (3.4.7)$$

Но

$$\sum_{\sigma} q^g = \sum_{n \geq 0} \text{ind}(m_1, m_2, \dots, m_r; n) q^n,$$

и, значит, (3.4.5) доказано.

Дабы наше соответствие стало совершенно прозрачным для понимания, приводим здесь полностью случай  $N = 3$ ,  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 2$  (см. стр. 58).

С л е д с т в и е 3.8.

$$\text{ind}(m_1, m_2, \dots, m_r; n) = \text{inv}(m_1, m_2, \dots, m_r; n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно приравнять коэффициенты при  $q^n$  в тождестве

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \text{inv}(m_1, m_2, \dots, m_r; n) q^n &= \\ &= \left[ \begin{matrix} m_1 + m_2 + \dots + m_r \\ m_1, m_2, \dots, m_r \end{matrix} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \text{ind}(m_1, m_2, \dots, m_r; n) q^n, \end{aligned}$$

которое есть прямое следствие теорем 3.6 и 3.7.

Материал этого параграфа был во многом расширен Фоата и Стенли. Заметим, кстати, что Фоата получил и чисто комбинаторное доказательство следствия 3.8.

### 3.5. Унимодальное свойство

Для многих приложений интересно распределение значений функций, подобных  $p(m_1, m_2; n)$ . Докажем один простой результат, который позволит нам в ряде случаев устанавливать полезную информацию о таких вопросах.

О п р е д е л е н и е 3.6. Многочлен  $p(q) = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n$  называется *возвратным*, если для каждого  $i$  выполняется равенство  $a_i = a_{n-i}$  или, эквивалентно,  $q^n p(q^{-1}) = p(q)$ .

**О п р е д е л е н и е 3.7.** Многочлен  $p(q) = a_0 + a_1q + \dots + a_nq^n$  *унимодален*, если существует такое  $m$ , что

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m \geq a_{m+1} \geq a_{m+2} \geq \dots \geq a_n.$$

**Т е о р е м а 3.9.** Пусть  $p(q)$  и  $r(q)$  — возвратные и унимодальные многочлены с неотрицательными коэффициентами; тогда многочлен  $p(q)r(q)$  также возвратен и унимодален, с неотрицательными коэффициентами.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $p(q) = a_0 + a_1q + \dots + a_nq^n$ ,  $r(q) = b_0 + b_1q + \dots + b_nq^n$ , и пусть

$$s(q) = p(q)r(q) = c_0 + c_1q + \dots + c_{n+m}q^{n+m},$$

где

$$c_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j b_{i-j}, \quad (3.5.1)$$

причем  $a_j = 0$ , если  $j < 0$  или  $j > n$ , и  $b_j = 0$ , если  $j < 0$  или  $j > m$ .

Согласно (3.5.1) все  $c_i$  неотрицательны. Поскольку

$$q^{n+m}s(q^{-1}) = q^n p(q^{-1}) q^m r(q^{-1}) = p(q)r(q) = s(q),$$

видим, что многочлен  $s(q)$  является возвратным.

Наконец, для демонстрации того, что многочлен  $s(q)$  унимодален, заметим прежде всего, что  $a_j - a_{j-1} \geq 0$  для всех  $j \leq n/2$  и  $b_j - b_{j-1} \geq 0$  для всех  $j \leq m/2$ ; это проистекает из того, что каждый из многочленов  $p(q)$  и  $r(q)$  возвратен и унимодален. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} 2(c_j - c_{j-1}) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i b_{j-i} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{n-i+1} b_{j-n+i-1} - \\ &\quad - \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{i-1} b_{j-i} - \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{n-i} b_{j-n+i-1} = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} (a_i - a_{i-1}) b_{j-i} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{j-n+i-1} (a_{n-i+1} - a_{n-i}) = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} (a_i - a_{i-1}) (b_{j-i} - b_{j-n+i-1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (a_i - a_{i-1}) (b_{j-i} - b_{j-n+i-1}) = \\ &= \sum_{i=0}^{(n+1)/2} (a_i - a_{i-1}) (b_{j-i} - b_{j-n+i-1}) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{(n+1)/2} (a_{n+1-i} - a_{n-i}) (b_{j-n+1+i} - b_{j-i}) = \\ &\quad (\text{заметим, что если } (n+1)/2 - \text{целое, то } a_{(n+1)/2} - a_{(n-1)/2} = 0) \\ &= 2 \sum_{i=0}^{n/2} (a_i + a_{i-1}) (b_{j-i} - b_{j-n+i-1}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$c_j - c_{j-1} = \sum_{i=0}^{n/2} (a_i - a_{i-1}) (b_{j-i} - b_{j-n+i-1}). \quad (3.5.2)$$

Поскольку  $0 \leq i \leq n/2$ , видим, что  $a_i - a_{i-1} \geq 0$ . Если  $j - i \leq m/2$ , то, поскольку  $n + 1 > 2i$ , видим, что  $m/2 \geq j - i > j - n + i - 1$ ; следовательно, в этом случае  $b_{j-i} - b_{j-n+i-1} \geq 0$ . Если  $j - i > m/2$ , то для  $0 \leq j \leq (m + n)/2$  видим, что  $m + n + 1 > 2j$  и, значит,  $m/2 > m - j + i > j - n + i - 1$ ; стало быть, в этом втором случае  $b_{j-i} - b_{j-n+i-1} = b_{m-j+i} - b_{j-n+i-1} \geq 0$ . Следовательно, в любом случае оба множителя каждого слагаемого из правой части (3.5.2) неотрицательны при условии, что  $0 \leq j \leq (m + n)/2$ , откуда возвратность многочлена  $s(q)$  влечет его унимодальность.

**Т е о р е м а 3.10.** Пусть  $N, M, n \geq 0$ . Тогда

$$p(N, M, n) = p(M, N, n), \quad (3.5.3)$$

$$p(N, M, n) = p(N, M, NM - n), \quad (3.5.4)$$

$$p(N, M, n) - p(N, M, n - 1) \geq 0, \\ 0 < n \leq NM/2. \quad (3.5.5)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** По теореме 3.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(N, M, n) q^n = G(N, M; q) = \left[ \begin{matrix} N+M \\ M \end{matrix} \right] = \frac{(q)_{N+M}}{(q)_N (q)_M}.$$

Равенство (3.5.3) следует из того факта, что функция

$$\left[ \begin{matrix} N+M \\ M \end{matrix} \right]$$

симметрична по  $N$  и  $M$ .

Степень  $G(N, M; q)$  равна

$$\binom{N+M+1}{2} - \binom{N+1}{2} - \binom{M+1}{2} = NM,$$

и, значит,

$$\begin{aligned} q^{NM} G(N, M; q^{-1}) &= \\ &= q^{NM} \frac{(1 - q^{-1})(1 - q^{-2}) \dots (1 - q^{-N-M})}{(1 - q^{-1})(1 - q^{-2}) \dots (1 - q^{-N})(1 - q^{-1})(1 - q^{-2}) \dots (1 - q^{-M})} = \\ &= \frac{q^{NM - \binom{N+M+1}{2} + \binom{N+1}{2} + \binom{M+1}{2}} (q)_{N+M}}{(q)_N (q)_M} = \\ &= \frac{(q)_{N+M}}{(q)_N (q)_M} = G(N, M; q). \end{aligned}$$

Следовательно,  $G(N, M; q)$  — возвратный многочлен степени  $NM$ , откуда сразу следует (3.5.4).

Неравенство (3.5.5) представляет собой унимодальное свойство, доказательство которого, к сожалению, лежит вне современной теории разбиений. Оно получено через теорию инвариантов; было показано, что  $p(N, M; n) - p(N, M; n - 1)$  есть число линейно независимых полуинвариантов степени  $M$ , веса  $n$  и размера, не превосходящего  $N$ . (I. J. Schur, Vorlesungen über Invariantentheorie, Satz 2.22, p. 76, Grundlehren der Mathematische Wissenschaften, v. 143).

Насколько известно, нет простого комбинаторного доказательства (3.5.5).

**Т е о р е м а 3.11.** Пусть  $m_1, m_2, \dots, m_r, n \geq 0$ ; тогда

$$\text{ind}(m_1, \dots, m_r; n) = \text{ind}(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}; n) =$$

$$= \text{inv}(m_1, \dots, m_r; n) = \text{inv}(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}; n), \quad (3.5.6)$$

где  $\{i_1, \dots, i_r\}$  — перестановка множества  $\{1, 2, \dots, r\}$ ;

$$\text{ind}(m_1, \dots, m_r; n) = \text{ind}(m_1, \dots, m_r; S - n) =$$

$$= \text{inv}(m_1, \dots, m_r; n) = \text{inv}(m_1, \dots, m_r; S - n), \quad (3.5.7)$$

где  $S = \sum_{1 \leq i < j \leq r} m_i m_j$  — вторичная элементарная симметрическая функция от  $m_i$ ;

$$\text{ind}(m_1, \dots, m_r; n) - \text{ind}(m_1, \dots, m_r; n - 1) =$$

$$= \text{inv}(m_1, \dots, m_r; n) - \text{inv}(m_1, \dots, m_r; n - 1) \geq 0 \quad (3.5.8)$$

для  $0 < n \leq S/2$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Поскольку

$$\sum_{n \geq 0} \text{ind}(m_1, \dots, m_r; n) q^n = \sum_{n \geq 0} \text{inv}(m_1, \dots, m_r; n) q^n =$$

$$= \left[ \begin{matrix} m_1 + \dots + m_r \\ m_1, \dots, m_r \end{matrix} \right] = \frac{(q)_{m_1 + m_2 + \dots + m_r}}{(q)_{m_1} (q)_{m_2} \dots (q)_{m_r}} =$$

$$= \left[ \begin{matrix} m_1 + m_2 \\ m_1 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} m_1 + m_2 + m_3 \\ m_1 + m_2 \end{matrix} \right] \dots \left[ \begin{matrix} m_1 + \dots + m_r \\ m_1 + \dots + m_{r-1} \end{matrix} \right],$$

видим, что величина  $\left[ \begin{matrix} m_1 + \dots + m_r \\ m_1, \dots, m_r \end{matrix} \right]$  есть функция, симметрическая по переменным  $m_i$  (отсюда сразу следует (3.5.6)), и в то же время есть произведение унимодальных возвратных многочленов (по теореме 3.10) и, стало быть, согласно теореме 3.9 является унимодальным и возвратным многочленом. Равенства (3.5.7) и (3.5.8) сразу следуют, если заметить, что степень этого многочлена

$$\left[ \begin{matrix} m_1 + m_2 + \dots + m_r \\ m_1, m_2, \dots, m_r \end{matrix} \right]$$

есть в точности

$$\begin{aligned} \binom{m_1 + \dots + m_r + 1}{2} - \binom{m_1 + 1}{2} - \binom{m_2 + 1}{2} - \dots - \binom{m_r + 1}{2} = \\ = \sum_{1 \leq i < j \leq r} m_i m_j = S. \end{aligned}$$

### Задачи

1. Следующую конечную форму тождества Якоби вывести из (3.3.6):

$$\sum_{j=-n}^n q^{j^2} x^j \begin{bmatrix} 2n \\ n+j \end{bmatrix}_{q^2} = (-x^{-1}q; q^2)_n (-xq; q^2)_n,$$

где  $\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}_{q^2}$  — обычный гауссовский многочлен, в котором  $q$  заметно на  $q^2$ .

2. Тождество Якоби (теорема 2.8) вывести из задачи 1. В задачах 3—9 через  $H_n(t)$  обозначены многочлены Роджерса—Сеге

$$H_n(t) = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} t^j.$$

3. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t) x^n}{(q)_n} = \frac{1}{(x)_{\infty} (xt)_{\infty}}.$$

4. Тождество (3.3.8) вывести из задачи 3 при  $t = -1$ .

5.  $H_n(q^{1/2}) = (-q^{1/2}; q^{1/2})_n.$

6.  $H_{n+1}(t) = (1+t)H_n(t) - (1-q^n)tH_{n-1}(t).$

7. Используя задачу 6 и (3.3.3), доказать индукцией по  $m$ , что

$$H_m(t) H_n(t) = \sum_{r=0}^m \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} (q)_r t^r H_{m+n-2r}(t).$$

8. Из задач 3 и 7 вывести, что

$$\sum_{m, n \geq 0} \frac{H_{m+n}(t) y^m z^n}{(q)_m (q)_n} = \frac{(tyz)_{\infty}}{(y)_{\infty} (z)_{\infty} (ty)_{\infty} (tz)_{\infty}}.$$

9. Из задачи 8 вывести, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t) H_n(s) x^n}{(q)_n} = \frac{(stx^2)_{\infty}}{(x)_{\infty} (tx)_{\infty} (sx)_{\infty} (tsx)_{\infty}}.$$

10. Доказать, что

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} q^{j^2 + aj} \begin{bmatrix} n+1-a-j \\ j \end{bmatrix} = \\ = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (-1)^h q^h (5h+1)/2 - 2ha \begin{bmatrix} n+1 \\ [(n+1-5h)/2 + a] \end{bmatrix} \end{aligned}$$



(где  $a = 0$  или  $1$ ); показать, что это так при  $n = 0, 1$  и что каждая половина равенства удовлетворяет рекуррентности  $f_n = f_{n-1} + q^n f_{n-2}$ .

11. Тожества Роджерса—Рамануджана могут быть выведены из задачи 10; именно, для  $a = 0$  или  $a = 1$

$$\sum_{j \geq 0} \frac{q^{j^2+a_j}}{(q)_j} = \prod_{j \geq 0} \frac{1}{(1 - q^{5j+a+1})(1 - q^{5j+4+a})}.$$

12. Пусть  $D_n$  обозначает многочлен, определенный в задаче 10, когда  $a = 0$ . Эти многочлены удовлетворяют тождествам

$$D_{2n} = \sum_{j=0}^n q^{jn} \begin{bmatrix} n+1 \\ j \end{bmatrix} D_{n-1-j} \quad \text{и} \quad D_n = 1 + \sum_{j=1}^n q^j D_{j-2}.$$

13. Пусть слова « $k$ -й эксцесс» разбиения  $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r)$  означают разность  $\lambda_1 - \lambda_{k+1}$ . Производящая функция для разбиений с  $j$  частями, первый эксцесс которых не превосходит  $i$ , имеет вид

$$\frac{(1 - q^{i+1}) q^j}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^i)}.$$

14. Показать, что для всякого  $k \leq j$  производящая функция для разбиения с  $j$  частями и  $k$ -м эксцессом, не превосходящим  $i$ , имеет вид

$$\frac{(1 - q^{i+1})(1 - q^{i+2}) \dots (1 - q^{i+k}) q^j}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^i)}.$$

15. Теорема 3.1 есть следствие задачи 14.

16. Число перестановок мультимножества  $\{1^{m_1} 2^{m_2} \dots r^{m_r}\}$  с четным индексом интенсивности равно числу перестановок с нечетным индексом интенсивности тогда и только тогда, когда по крайней мере два  $m_i$  нечетны.

17. Можно определить многомерный аналог многочленов Роджерса—Сеге:

$$H_n(x_1, \dots, x_s) = \sum_{j_1, \dots, j_s \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ j_1, j_2, \dots, j_s, n - j_1 - \dots - j_s \end{bmatrix} x_1^{j_1} \dots x_s^{j_s}.$$

Соответствующая производящая функция имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x_1, \dots, x_s) t^n}{(q)_n} = \frac{1}{(t)_{\infty} (tx_1)_{\infty} \dots (tx_s)_{\infty}}.$$

18. *Выступающее разбиение* числа  $n$  есть невозрастающая последовательность положительных целых  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$  вместе с последовательностью неотрицательных целых  $0 \leq \mu_i \leq \lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , такая, что  $\sum (\lambda_i + \mu_i) = n$ . (Эти  $\mu_i$  называются *выступами* обычного разбиения  $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r)$ .) Произведение

$$U_m = \prod_{j=1}^m (1 - q^j - q^{j+1} - \dots - q^{2j})^{-1}$$

представляет собой производящую функцию для выступающих разбиений с  $\lambda_i \leq m$ .

19. Из (3.3.13) (при  $a = x^{-1/2}$ ,  $b = x^{-1/2}$ ,  $c = q^2/(1 - q)$ ;  $t$  заменить на  $xzq^2/(1 - q)$ ) вывести, что при  $x \rightarrow 0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} U_m z^m = \left( \prod_{s=0}^{\infty} (1 - zq^s)^{-1} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)} z^n}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)(1-q-q^2) \dots (1-q-q^{n+1})}.$$

### З а м е ч а н и я

Гаусс (1863, с. 16) ввел гауссовские многочлены и отметил некоторые тождества из теоремы 3.2. Теорема 3.1 была впервые сформулирована, по-видимому, Сильвестром (1884—1886), однако ее можно тривиально вывести из (3.3.6) и (3.3.7) — тождеств Коши (см. Works, 1893, p. 46). Равенство (3.3.8) принадлежит Гауссу (1863) и было использовано им в исследовании гауссовских сумм; (3.3.9) также принадлежит Гауссу (1863). Равенство (3.3.10) есть фактически специальный случай следствия 2.4, принадлежащего Гейне (1847); фактически это  $q$ -аналог знаменитого суммирования Чу—Вандермонда [4, 5, с. 60], и наше доказательство параллельно стандартному элементарному доказательству этого суммирования. Как отмечалось в тексте, (3.3.11) принадлежит Джексоу (1910); одно из наиболее важных приложений было дано Ватсоном (1929) и применяется также в [21].

Параграф 3.4 может быть полностью основан на работах Мак-Магона (1913, 1914, 1915—1916, 1916), которые предвосхитили многие из недавних работ по комбинаторной теории перестановок; из них отметим [8, 9, 10, 21]. Достаточно интересно, что мак-магоновское доказательство теоремы 3.7 принципиально важно для теории  $(P, \omega)$ -разбиений [21, лемма 6.1 и теорема 6.2]. Эти разбиения вводятся в § 4 гл. 14, а их приложения к перестановкам см. в [21, § 25].

Материал § 3.5 см. в [3].

Задачи 1, 2 — [13, с. 155, 156]; задачи 3—9 — [6, 23, 19, 20]; задачи 10, 11 — [1]; задача 12 — [2]; задачи 13—15 принадлежат Франклину и помещены в [22]; задача 16 — [15, 17]; задачи 18, 19 — [21, § 24]. В § 23 в [21] рассматриваются пучки и  $V$ -разбиения и эти объекты также приводят к тождествам, связанным со следствием 2.3.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Andrews G. E. (1970). A polynomial identity which implies the Rogers—Ramanujan identities. — Scripta Math. **28**, p. 297—305.
2. Andrews G. E. (1974). Combinatorial analysis and Fibonacci numbers. — Fibonacci Quart. **12**, p. 141—146.
3. Andrews G. E. (1975). A theorem on reciprocal polynomials with applications to permutations and compositions. — Amer. Math. Monthly **82**, p. 830—833.
4. Askey R. A. (1975a). A note on the history of series. — Math. Res. Center Tech. Summary Rept. № 1532, Madison, Wisconsin.
5. Askey R. A. (1975b). Orthogonal Polynomials and Special Functions, № 21 — Regional Conf. Ser. Appl. Math., SIAM, Philadelphia.
6. Carlitz L. (1956). Some polynomials related to theta functions. — Ann. Math. Pura Appl. (4), **41**, p. 359—373.
7. Cauchy A. (1893). Oeuvres, Ser. 1. Vol. 8. — Gauthier-Villars, Paris.

8. Foata D. (1965). Etude algébrique de certains problèmes d'Analyse Combinatoire et du Calcul des Probabilités. — Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **14**, p. 81—241.
9. Foata D. (1968). On the Netto inversion number of a sequence. — Proc. Amer. Math. Soc. **19**, p. 236—240.
10. Foata D., Schützenberger M. P. (1970). Théorie géométrique des polynômes Eulériens (Lecture Notes in Math. № 138). — Springer, New York.
11. Gauss C. F. (1863). Werke, Vol. 2. — Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen.
12. Heine E. (1847). Untersuchungen über die Reihe. — J. Reine Angew. Math. **34**, p. 285—328.
13. Hermite C. (1891). Oeuvres, Vol. 2. — Gauthier-Villars, Paris.
14. Jackson F. H. (1910). Transformations of  $q$ -series. — Messenger of Math. **39**, p. 145—151.
15. MacMahon P. A. (1913). The indices of permutations and the derivation therefrom of functions of a single variable associated with the permutations of any assemblage of objects. — Amer. J. Math. **35**, p. 281—322.
16. MacMahon P. A. (1914). The superior and inferior indices of permutations. — Trans. Cambridge Phil. Soc. **29**, p. 55—60.
17. MacMahon P. A. (1915—1916). Combinatory Analysis, 2 vols. — Cambridge Univ. Press, London and New York (reprinted by Chelsea, New York, 1960).
18. MacMahon P. A. (1916). Two applications of general theorems in combinatory analysis: (1) to the theory of inversions of permutations; (2) to the ascertainment of the numbers of terms in the development of a determinant which has amongst its elements an arbitrary number of zeros. — Proc. London Math. Soc. (2) **15**, p. 314—321.
19. Rogers L. J. (1893a). On a three-fold symmetry in the elements of Heine's series. — Proc. London Math. Soc. **24**, p. 171—179.
20. Rogers L. J. (1893b). On the expansion of certain infinite products. — Proc. London Math. Soc. **24**, p. 337—352.
21. Stanley R. P. (1972). Ordered structures and partitions. — Mem. Amer. Math. Soc. **119**.
22. Sylvester J. J. (1882—1884). A constructive theory of partitions in three acts, an interact, and an exodion. — Amer. J. Math. **5**, p. 251—330; **6**, p. 334—336 (or p. 1—83 of the Collected Papers of J. J. Sylvester, Vol. 4, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1912; reprinted by Chelsea, New York, 1974).
23. Szegő G. (1926). Ein Beitrag zur Theorie der Thetafunktionen. — S. B. Preuss. Akad. Wiss. Phys—Math. Kl. p. 242—252.
24. Watson G. N. (1929). A new proof of the Rogers—Ramanujan identities. — J. London Math. Soc. **4**, p. 4—9.

## КОМПОЗИЦИИ И ПРОБЛЕМА СИМОНА НЬЮКОМБА

### 4.1. Введение

В первых трех главах выявлялись элементарные свойства разбиений. Композиции — это разбиения, в которых учитывается порядок слагаемых. Так, например, имеются пять разбиений числа 4:  $(4)$ ,  $(1\ 3)$ ,  $(2^2)$ ,  $(1^2\ 2)$ ,  $(1^4)$  и восемь композиций числа 4:  $(4)$ ,  $(1\ 3)$ ,  $(3\ 1)$ ,  $(2\ 2)$ ,  $(1\ 1\ 2)$ ,  $(1\ 2\ 1)$ ,  $(2\ 1\ 1)$ ,  $(1\ 1\ 1\ 1)$ . Здесь мы увидим, что композиции векторов представляют как самостоятельный интерес, так и имеют важные приложения, особенно к задачам о перестановках, типа проблемы Симона Ньюкомба.

### 4.2. Композиции чисел

**О п р е д е л е н и е 4.1.** Пусть  $c(m, n)$  обозначает число композиций числа  $n$  точно с  $m$  частями.

**Т е о р е м а 4.1.**

$$c(m, n) = \binom{n-1}{m-1} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}.$$

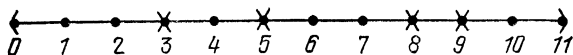
Первое доказательство теоремы 4.1. Рассуждение, используемое в доказательстве теоремы 1.1, можно легко применить для доказательства того, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c(m, n) q^n &= (q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots)^m = \\ &= \frac{q^m}{(1-q)^m} = q^m \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+m-1}{r} q^r = \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n-1}{n-m} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1}{m-1} q^n. \quad (4.2.1) \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при  $q^n$  в крайних членах этой цепочки равенств, получаем требуемое.

Второе доказательство теоремы 4.1. Введем графическое представление для композиций числа  $n$ . С композицией  $(a_1 a_2 \dots a_m)$  числа  $n$  связываем  $m$  сегментов интервала

$[0, n]$ ; первый сегмент имеет длину  $a_1$ , второй — длину  $a_2$  и так далее. Таким образом, композиция  $(3\ 2\ 3\ 1\ 2)$  числа 11 представима в виде



Заметим теперь, что можно построить каждую из  $c(m, n)$  композиций  $n$  с  $m$  частями, выбирая  $m - 1$  чисел из  $n - 1$  первых целых как конечные точки для таких  $m$  сегментов, разделяющих интервал  $[0, n]$ . Поскольку таких выборов может быть  $\binom{n-1}{m-1}$ , видим, что  $c(m, n) = \binom{n-1}{m-1}$ .

**О п р е д е л е н и е 4.2.** Пусть  $c(N, M, n)$  обозначает число композиций числа  $n$  точно с  $M$  частями, каждая из которых не превосходит  $N$ .

Очевидно, если  $N \geq n$ , то  $c(N, M, n) = c(M, n)$ .

Достаточно интересно, что  $c(N, M, n)$  обладает свойствами, весьма похожими на те, что описаны в теореме 3.10 для  $p(N, M, n)$ .

**Т е о р е м а 4.2.** Пусть  $N, M, n \geq 1$ ; тогда

$$c(N, M, n) = c(N, M, MN + M - n), \quad (4.2.2)$$

$$c(N, M, n) - c(N, M, n - 1) \geq 0,$$

$$0 < n \leq M(N + 1)/2. \quad (4.2.3)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Придерживаясь рассуждения из первого доказательства теоремы 4.1, видим, что

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} c(N, M, n) q^n &= (q + q^2 + \dots + q^N)^M = \\ &= (0 + q + q^2 + \dots + q^N + 0 \cdot q^{N+1})^M. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\sum_{n \geq 0} c(N, M, n) q^n$  есть произведение  $M$  унимодальных возвратных многочленов с неотрицательными коэффициентами; поэтому согласно теореме 3.9  $\sum_{n \geq 0} c(N, M, n) q^n$  — это унимодальный возвратный многочлен с неотрицательными коэффициентами. Равенства (4.2.2) и (4.2.3) сразу следуют из этого факта.

Простота теоремы 4.1 позволяет получать чисто асимптотические выражения для некоторых функций разбиений, связывая их с функциями композиций. Такой подход принадлежит Гупта (1942).

**О п р е д е л е н и е 4.3.** Пусть  $p_M(n)$  обозначает число разбиений числа  $n$  ровно с  $M$  частями.

Очевидно, что  $\sum_{M=0}^n p_M(n) = p(n)$ ,  $p(n, M, n) - p(n, M-1, n) = p_M(n)$ .

**Т е о р е м а 4.3** (Эрдёш—Ленер). Пусть  $n \rightarrow \infty$ ; тогда

$$p_M(n) \sim \frac{1}{M!} \binom{n-1}{M-1} \quad \text{при } M = o(n^{1/3}).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Каждому разбиению  $n$  ровно с  $M$  частями можно поставить в соответствие множество всех композиций  $n$  с теми же частями. Имеется  $M!$  таких композиций, если все части различны; в противном случае их, конечно, меньше. Поэтому

$$M! p_M(n) \geq c(M, n),$$

или

$$p_M(n) \geq \frac{1}{M!} c(M, n) = \frac{1}{M!} \binom{n-1}{M-1}. \quad (4.2.4)$$

С другой стороны, если  $q_M(n)$  обозначает число разбиений  $n$  с  $M$  различными частями, то

$$q_M(n + M(M-1)/2) = p_M(n). \quad (4.2.5)$$

В истинности (4.2.5) можно убедиться посредством соответствия  $(A_1 + M - 1, A_2 + M - 2, A_3 + M - 3, \dots, A_M) \leftrightarrow (A_1, A_2, \dots, A_M)$ ,

где  $A_1 \geq A_2 \geq \dots \geq A_M$  и  $\sum A_i = n$ .

Теперь каждое разбиение, перечисляемое функцией  $q_M(n)$ , соответствует точно  $M!$  композициям, как в первом абзаце этого доказательства. Стало быть,

$$M! q_M(n) \leq c(M, n).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} p_M(n) &= q_M(n + M(M-1)/2) \leq \\ &\leq \frac{1}{M!} c(M, n + M(M-1)/2) = \frac{1}{M!} \binom{n + M(M-1)/2 - 1}{M-1}. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Комбинируя (4.2.4) и (4.2.6), видим, что

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{p_M(n)}{\frac{1}{M!} \binom{n-1}{M-1}} \leq \frac{(n + M(M-1)/2 - 1)! (n - M)!}{(n-1)! (n + M(M-3)/2)!} = \\ &= \frac{\Gamma(n - M + 1) \Gamma(n + M(M-1)/2)}{\Gamma(n) \Gamma(n + M(M-3)/2 + 1)} \sim (\text{т. к. } M = o(n^{1/2})) \sim \\ &\sim n^{-M+1} (n + M(M-1)/2)^{M-1} = \left(1 + \frac{M(M-1)/2}{n}\right)^{M-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ (M-1) \log \left[ 1 + \frac{M(M-1)}{2n} \right] \right\} = \\
&= \exp \left\{ \frac{M(M-1)^2}{2n} + O \left( \frac{M^2(M-1)^3}{n^2} \right) \right\},
\end{aligned}$$

а это последнее выражение стремится к 1 при  $n \rightarrow \infty$ , и, значит,  $M = o(n^{1/3})$ .

Вполне ясно, что асимптотические вопросы относительно функций разбиений могут допускать подходы, подобные приведенному выше.

### 4.3. Векторные композиции \*)

Векторы рассматриваются с неотрицательными компонентами, из которых не все равны нулю.

**О п р е д е л е н и е 4.4.** Разбиение вектора  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  есть множество векторов  $(\beta_1^{(i)}, \dots, \beta_r^{(i)})$ ,  $1 \leq i \leq s$  (упорядоченное произвольно), такое, что  $\sum_{i=1}^s (\beta_1^{(i)}, \dots, \beta_r^{(i)}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  (здесь, как отмечалось ранее, все векторы имеют неотрицательные координаты, не все равные нулю). Если порядок частей учитывается, то называем  $(\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_r^{(1)}), \dots, (\beta_1^{(s)}, \dots, \beta_r^{(s)})$  композицией вектора  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ .

**О п р е д е л е н и е 4.5.** Пусть  $P = (\alpha_1, \dots, \alpha_r; m)$  обозначает число разбиений вектора  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  с  $m$  частями, а  $c(\alpha_1, \dots, \alpha_r; m)$  — число композиций вектора  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  с  $m$  частями.

Так,  $P = (2, 1, 1; 2) = 5$ , поскольку имеются пять разбиений вектора  $(2, 1, 1)$  на две части:  $(2, 1, 0)$   $(0, 0, 1)$ ,  $(2, 0, 1)$   $(0, 1, 0)$ ,  $(2, 0, 0)$   $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$   $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$   $(1, 0, 0)$ ;  $c(2, 1, 1; 2) = 10$ , поскольку каждое из этих пяти разбиений порождает две композиции.

**О п р е д е л е н и е 4.6.** Через  $P(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  (соответственно  $c(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ ) обозначаем полное число разбиений (соответственно композиций) вектора  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ .

Примем, что  $c(0, 0, \dots, 0) = 1/2$ .

Заметим, что  $\sum_{m \geq 1} P = (\alpha_1, \dots, \alpha_r; m) = P(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  и

$$\sum_{m \geq 1} c(\alpha_1, \dots, \alpha_r; m) = c(\alpha_1, \dots, \alpha_r).$$

---

\*) Строгому стилю Мак-Магона более подошло бы название «композиции многокомпонентных чисел», однако название «векторные композиции» точное соответствует современному математическому языку.

Т е о р е м а 4.4.

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 0} c(\alpha_1, \dots, \alpha_r) t_1^{\alpha_1} \dots t_r^{\alpha_r} = \frac{1}{4(1-t_1)(1-t_2) \dots (1-t_r) - 2}. \quad (4.3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с замечания, что при  $m \geq 1$  (и при условии, что не все  $\alpha_i = 0$ )

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 0} c(\alpha_1, \dots, \alpha_r; m) t_1^{\alpha_1} \dots t_r^{\alpha_r} = \\ & = \left( \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 0} t_1^{\alpha_1} \dots t_r^{\alpha_r} \right)^m = \left( \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2) \dots (1-t_r)} - 1 \right)^m. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 0} c(\alpha_1, \dots, \alpha_r) t_1^{\alpha_1} \dots t_r^{\alpha_r} = \\ & = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 0} c(\alpha_1, \dots, \alpha_r; m) t_1^{\alpha_1} \dots t_r^{\alpha_r} = \\ & = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2) \dots (1-t_r)} - 1 \right)^m = \\ & = \frac{1}{2} + \frac{((1-t_1)(1-t_2) \dots (1-t_r))^{-1} - 1}{2 - ((1-t_1)(1-t_2) \dots (1-t_r))^{-1}} = \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1 - (1-t_1)(1-t_2) \dots (1-t_r)}{2(1-t_1)(1-t_2) \dots (1-t_r) - 1} = \\ & = \frac{1/2}{2(1-t_1)(1-t_2) \dots (1-t_r) - 1}. \end{aligned}$$

Равенство (4.3.2) обеспечивает вывод достаточно простой формулы для  $c(\alpha_1, \dots, \alpha_r; m)$ .

Т е о р е м а 4.5. При  $m > 0$

$$\begin{aligned} & c(\alpha_1, \dots, \alpha_r; m) = \\ & = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \binom{\alpha_1 + m - i - 1}{\alpha_1} \binom{\alpha_2 + m - i - 1}{\alpha_2} \dots \binom{\alpha_r + m - i - 1}{\alpha_r}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$



**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно (4.3.2) (предполагая, что  $c(0, \dots, 0; m) = 0$ ) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 0} c(\alpha_1, \dots, \alpha_r; m) t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_r^{\alpha_r} &= \\ &= \left( \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)\dots(1-t_r)} - 1 \right)^m = \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i (1-t_1)^{-m+i} (1-t_2)^{-m+i} \dots (1-t_r)^{-m+i} = \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i \sum_{\alpha_1 \geq 0} \binom{\alpha_1 + m - i - 1}{\alpha_1} t_1^{\alpha_1} \dots \sum_{\alpha_r \geq 0} \binom{\alpha_r + m - i - 1}{\alpha_r} t_r^{\alpha_r} = \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 0} \left( \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \binom{\alpha_1 + m - i - 1}{\alpha_1} \dots \binom{\alpha_r + m - i - 1}{\alpha_r} \right) t_1^{\alpha_1} \dots t_r^{\alpha_r}. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при  $t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_r^{\alpha_r}$  в крайних членах (4.3.4), получаем требуемое.

В качестве примера использования теоремы 4.5 заметим, что

$$\begin{aligned} c(2, 1, 1; 2) &= \binom{3}{2} \binom{2}{1} \binom{2}{1} - \binom{2}{1} \binom{2}{2} \binom{1}{1} \binom{1}{1} + \\ &+ \binom{1}{2} \binom{0}{1} \binom{0}{1} = 3 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 = 10. \end{aligned}$$

#### 4.4. Проблема Симона Ньюкомба

Проблеме, к которой мы собираемся сейчас обратиться, исчерпывающее решение дал Мак-Магон в 1907 году. И сама проблема и ее история были кратко описаны Мак-Магоном в *Combinatory Analysis*, 1915, v. 1, p. 187:

«Задача, предложенная профессором Ньюкомбом, это игра, состоящая в раскладывании пасьянса обычными картами, за которой проводил он короткие часы отдыха от своих астрономических исследований. Она может быть описана следующим образом:

Берется колода карт произвольной спецификации — скажем,  $m_1$  карт, помеченных единицей 1,  $m_2$  карт — двойкой 2,  $m_3$  карт — 3 и так далее, и, будучи перемешанной, раскладывается на столе; пока карты идут в возрастающем порядке своих значений, равенство значений принимается за возрастающий порядок, они кладутся в одну стопку, но по нарушении возрастающего порядка раскладывание продолжается с новой стопки. Какова вероятность того, что в результате получится  $m$  или не более чем  $m$  стопок?».

Можно легко переформулировать эту задачу в терминах перестановок мультимножества.

**О п р е д е л е н и е 4.7.** Пусть  $N(m_1, m_2, \dots, m_r; n)$  обозначает число перестановок мультимножества  $\{1^{m_1} 2^{m_2} \dots r^{m_r}\}$  ровно с  $n$  сериями (под серией в перестановке  $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{m_1 + \dots + m_r}$  понимаем насыщенную, т. е. непродолжаемую в оба конца, монотонную, непрерывно возрастающую подпоследовательность

$$\xi_i \leq \xi_{i+1} \leq \xi_{i+2} \leq \dots \leq \xi_{j-1} \leq \xi_j).$$

Мы будем иметь ответ на вопрос Симона Ньюкомба, если сумеем найти замкнутое выражение для  $N(m_1, m_2, \dots, m_r; n)$ .

**Л е м м а 4.6.** Каждое из следующих соотношений влечет другое:

$$a_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{r-n+j}{j} b_{n-j}, \quad n \geq 1, \quad (4.4.1)$$

$$b_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{r-n+j}{j} (-1)^j a_{n-j}, \quad n \geq 1. \quad (4.4.2)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Начнем с замечания, что достаточно лишь показать, что (4.4.2) всегда влечет (4.4.1), поскольку обратная импликация следует из замены  $b'_n = (-1)^n b_n$ ,  $a'_n = (-1)^n a_n$ .

Отталкиваясь теперь от (4.4.2), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{r-n+j}{j} b_{n-j} &= \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{r-n+j}{j} \sum_{k=0}^{n-j-1} \binom{r-n+j+k}{k} (-1)^k a_{n-j-k} = \\ &= \sum_{\substack{j+k \leq n-1 \\ j, k \geq 0}} \binom{r-n+j}{j} \binom{r-n+j+k}{k} (-1)^k a_{n-j-k} = \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} a_{n-h} \sum_{\substack{j+k=h \\ j, k \geq 0}} \binom{r-n+j}{j} \binom{r-n+k}{k} (-1)^k = \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} a_{n-h} (-1)^h \sum_{j=0}^n \binom{n-r-1}{j} \binom{r-n+h}{h-j} = \\ &= a_n + \sum_{h=1}^{n-1} a_{n-h} (-1)^h \binom{h-1}{h} \stackrel{(3.3.10), q=1}{=} a_n, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Л е м м а 4.7.

$$c(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r - n + j}{j} N(\alpha_1, \dots, \alpha_r; n - j). \quad (4.4.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Тождество (4.4.3) легко устанавливается обеспечением подходящих комбинаторных интерпретаций для  $c(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; n)$  и  $N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; n)$ .

Ясно, что  $c(\alpha_1, \dots, \alpha_r; n)$  перечисляет число способов, которыми  $\alpha_1$  шаров типа 1,  $\alpha_2$  шаров типа 2, ...,  $\alpha_r$  шаров типа  $r$  могут быть размещены в  $r$  помеченных (различимых) ящиков при условии отсутствия пустых ящиков. Для того чтобы убедиться в этом, замечаем, что композиция

$$(\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_r^{(1)}) (\beta_1^{(2)}, \dots, \beta_r^{(2)}) \dots (\beta_1^{(n)}, \dots, \beta_r^{(n)})$$

вектора  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  соответствует распределению, при котором ровно  $\beta_i^{(j)}$  шаров типа  $i$  находятся в  $j$ -м ящике.

Весьма подобная интерпретация может быть дана и для  $N(\alpha_1, \dots, \alpha_r; n)$ . В самом деле,  $j$ -я серия в перестановке может быть рассмотрена как размещение этих элементов в  $j$ -м блоке. Важно отметить, что функция  $N(\alpha_1, \dots, \alpha_r; n)$  не перечисляет все возможные размещения (как это делает  $c(\alpha_1, \dots, \alpha_r; n)$ ), а перечисляет только те, в которых наименьший элемент в каждом ящике строго меньше наибольшего элемента в предшествующем ящике. Стало быть, каждой перестановке, перечисляемой функцией  $N(\alpha_1, \dots, \alpha_r; n - j)$ , можно поставить в соответствие единственное множество размещений, перечисляемых функцией  $c(\alpha_1, \dots, \alpha_r; n)$ , по правилу:

Поместим вертикальную линию между каждой из  $n - j$  серий в данной перестановке. Теперь имеется  $\alpha_1 + \dots + \alpha_r - (n - j - 1) - 1$  пар  $\xi_i \xi_{i+1}$  без вертикальной преграды между ними; поместим вертикальную черточку между  $j$  такими парами и получим распределение  $\alpha_1$  единиц,  $\alpha_2$  двоек и так далее в  $n$  помеченных непустых ящиках. Поскольку последнее множество из  $j$  вертикальных черточек может быть размещено

$$\binom{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r - n + j}{j}$$

способами, то видим, что в точности столько же распределений, перечисляемых функцией  $c(\alpha_1, \dots, \alpha_r; n)$ , соответствует единственной перестановке, перечисляемой  $N(\alpha_1, \dots, \alpha_r; n - j)$ . Поэтому

$$c(\alpha_1, \dots, \alpha_r; n) = \sum_{j=0}^n \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_r - n + j}{j} N(\alpha_1, \dots, \alpha_r; n - j),$$

что и требовалось доказать.

**Т е о р е м а 4.8.** Для  $n > 0$

$$N(\alpha_1, \dots, \alpha_r; n) = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_r + 1}{s} \binom{n + \alpha_1 - 1 - s}{\alpha_1} \times \\ \times \binom{n + \alpha_2 - 1 - s}{\alpha_2} \dots \binom{n + \alpha_r - 1 - s}{\alpha_r}. \quad (4.4.4)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Применяя лемму 4.6 к (4.4.3), видим, что

$$N(\alpha_1, \dots, \alpha_r; n) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_r - n + j}{j} c(\alpha_1, \dots, \alpha_r; n - j) \stackrel{(4.3.3)}{=} \\ = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_r - n + j}{j} \times \\ \times \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \binom{n-j}{i} \binom{\alpha_1 + n - j - i - 1}{\alpha_1} \dots \binom{\alpha_r + n - j - i - 1}{\alpha_r} = \\ = \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{\alpha_1 + n - s - 1}{\alpha_1} \binom{\alpha_2 + n - s - 1}{\alpha_2} \dots \\ \dots \binom{\alpha_r + n - s - 1}{\alpha_r} \sum_{\substack{i+j=s \\ i \geq 0, j \geq 0}} \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_r - n + j}{j} \binom{n-j}{i}. \quad (4.4.5)$$

Теперь

$$\sum_{\substack{i+j=s \\ i \geq 0, j \geq 0}} \binom{A - n + j}{j} \binom{n-j}{i} = \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{n-A-1}{j} \binom{n-j}{s-j} = \\ = (-1)^s \sum_{j=0}^s \binom{n-A-1}{j} \binom{s-n-1}{s-j} \stackrel{((3.3.9), q=1)}{=} \\ = (-1)^s \binom{s-A-2}{s} = \binom{A+1}{s}. \quad (4.4.6)$$

Применяя (4.4.6) к (4.4.5), получаем (4.4.4).

### Задачи

1. Пусть  $F_n$  —  $n$ -е число Фибоначчи:  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ,  $n > 1$ . Показать, что число композиций  $n$ , в которых нет единиц, равно  $F_{n-1}$ .

2. В более общем виде — пусть  ${}_k F_n$  определяется по правилу:

$${}_k F_0 = \dots = {}_k F_{k-2} = 0, \quad {}_k F_{k-1} = 1, \quad {}_k F_n = {}_k F_{n-1} + {}_k F_{n-k}.$$

Показать, что число композиций  $n$ , в которых все части  $\geq k$ , равно  ${}_k F_{n-1}$ .

3. Из задачи 2 следует, что имеется  $2^{n-1}$  композиций числа  $n$ .

4. Пусть  $c_k(m, n)$  обозначает число композиций  $n$  точно с  $m$  частями, каждая из которых не меньше  $k$ . Тогда

$$c_k(m, n) = \binom{n - (k-1)m - 1}{m-1}.$$

5. Из задач 2 и 4 следует, что

$$\sum_{m \geq 1} \binom{n - (k-1)m - 1}{m-1} = {}_k F_{n-1}.$$

6. Будем говорить, что вектор  $(m_1, \dots, m_r)$  имеет *реальную размерность*  $h$ , если  $m_h \neq 0$ ,  $m_{h+1} = 0, \dots, m_r = 0$ . Тогда полное число всех композиций всех векторов  $(\beta_1, \dots, \beta_r)$  с  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ , в которых ровно  $h_i$  частей имеют реальную размерность  $i$ , равно

$$\begin{aligned} & \binom{\alpha_1}{h_1} \binom{\alpha_2}{h_2} \dots \binom{\alpha_r}{h_r} \binom{\alpha_1 + h_2 + \dots + h_r}{\alpha_1} \times \\ & \times \binom{\alpha_2 + h_3 + \dots + h_r}{\alpha_2} \dots \binom{\alpha_{r-1} + h_r}{\alpha_{r-1}}. \end{aligned}$$

7. Из задачи 6 следует, что

$$\begin{aligned} c(\alpha_1, \dots, \alpha_r) &= \frac{1}{2} \sum_{h_1, \dots, h_r \geq 0} \binom{\alpha_1}{h_1} \binom{\alpha_2}{h_2} \dots \\ & \dots \binom{\alpha_r}{h_r} \binom{\alpha_1 + h_2 + \dots + h_r}{\alpha_1} \binom{\alpha_2 + h_3 + \dots + h_r}{\alpha_2} \dots \binom{\alpha_{r-1} + h_r}{\alpha_{r-1}}. \end{aligned}$$

8. Оператор Лонга  $L_i$  есть линейный оператор

$$L_i x_i^k = \binom{\alpha_i}{\alpha_{i+1} + \dots + \alpha_r - k}.$$

Доказать индукцией по  $j$ , что

$$L_i (x_i^k (1 + x_i)^j) = \binom{\alpha_i + j}{\alpha_{i+1} + \dots + \alpha_r - k}.$$

9. Если в многочлене

$$2^{\alpha_1-1} \prod_{i=2}^r \{x_1 x_2 \dots x_{i-1} + (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{i-1})\}^{\alpha_i}$$

каждое  $x_i^k$  заменить на

$$\binom{\alpha_i}{\alpha_{i+1} + \dots + \alpha_r - k},$$

то в результате получится  $c(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ .

Предшествующее утверждение просто означает, что

$$\begin{aligned} c(\alpha_1, \dots, \alpha_r) &= \\ &= L_1 L_2 \dots L_{r-1} 2^{\alpha_1-1} \prod_{i=2}^r \{x_1 x_2 \dots x_{i-1} + (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{i-1})\}^{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Для доказательства последнего достаточно представить каждый множитель через биномиальную теорему и при помощи задачи 8 свести это тождество к задаче 7.

10. Раскладывая  $(1 + x_i)^j$  по биномиальной теореме, вывести (3.3.10) с  $q = 1$  из задачи 8:

$$\sum_{s=0}^j \binom{j}{s} (\alpha_{i+1} + \dots + \alpha_r - k - s) = \binom{\alpha_i + j}{\alpha_{i+1} + \dots + \alpha_r - k}.$$

11. Случай  $q = 1$  равенства (3.3.11) можно легко вывести, привлекая операторы Лонга. Запишем искомый результат в виде

$$\sum_{r \geq 0} \binom{m}{r} \binom{m + \mu}{n - r} \binom{\mu + \nu + r}{m + n + \nu} = \binom{\mu + \nu}{\mu + m} \binom{\nu}{n},$$

Если рассмотреть линейные операторы  $L_1$  и  $L_2$ , определяемые по правилу

$$L_1(x^r) = \binom{n}{n-r}, \quad L_2(y^s) = \binom{\mu + \nu}{m + n + \mu - s},$$

то задача 8 влечет, что

$$L_1(x^r (1+x)^t) = \binom{n+t}{n-r}, \quad L_2(y^s (1+y)^u) = \binom{\mu + \nu + u}{m + n + \mu - s},$$

откуда

$$\begin{aligned} \sum_{r \geq 0} \binom{m}{r} \binom{n + \mu}{n - r} \binom{\mu + \nu + r}{m + n + \mu} &= L_1 L_2 ((1+x)^u (1+x(1+y))^m) = \\ &= L_1 L_2 ((1+x)^{\mu+m} (1+xy(1+x)^{-1})^m) = \\ &= \sum_{j \geq 0} \binom{m}{j} \binom{\mu + \nu}{m + n + \mu - j} \binom{n + \mu + m - j}{n - j} = \\ &= \binom{\mu + \nu}{\mu + m} \sum_{j \geq 0} \binom{m}{j} \binom{\nu - m}{n - j} = \binom{\mu + \nu}{\mu + m} \binom{\nu}{n}. \end{aligned}$$

### З а м е ч а н и я

Материал этой главы в основном представляет собой некоторое расширение и модернизацию работ о композициях [46, 47] и раздел IV в [48]. Теорема 4.2 принадлежит Стару (1976) (см. также [1]), который получил также и асимптотические формулы для  $c(N, M, n)$ . Теорема 4.3 принадлежит Эрдешу и Ленеру (1941), а ее приведенное здесь доказательство — Гупта (1942).

В последние годы усилились исследования по векторным композициям и проблеме Симона Ньюкомба. Литературу по этим направлениям см. в работах Карлитца, Диллона, Фоата, Кревера, Розеля и Шютценберга. Должно также отметить и применимость  $(P, \omega)$ -разбиений Стенли к композициям и задачам типа проблемы Симона Ньюкомба (см. [50], § 25). Некоторые работы из [44, раздел P80] относятся к композициям.

Задача 1 — [24]; задачи 6—10 — [45, 2, 3, 4].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Andrews G. E. (1975a). A theorem on reciprocal polynomials with applications to permutations and compositions. — Amer. Math. Monthly **82**, p. 830—833.
2. Andrews G. E. (1975b). The theory of compositions, II: Simon Newcomb's problem. — Utilitas Math. **7**, p. 33—54.

3. Andrews G. E. (1976a). The theory of compositions, I: The ordered factorizations of  $n$  and a conjecture of C. Long. — Canadian Math. Bull. **18**, p. 479—484.
4. Andrews G. E. (1976b). The theory of compositions, III: The MacMahon formula and the Stanton—Cowan numbers. — Utilitas Math. **9**, p. 283—290.
5. Carlitz L. (1959). Eulerian numbers and polynomials. — Math. Mag. **33**, p. 247—260.
6. Carlitz L. (1960). Eulerian numbers and polynomials of higher order. — Duke Math. J. **27**, p. 401—424.
7. Carlitz L. (1964). Extended Bernoulli and Eulerian numbers. — Duke Math. J. **31**, p. 667—690.
8. Carlitz L. (1972a). Enumeration of sequences by rises and falls: A refinement of the Simon Newcomb problem. — Duke Math. J. **39**, p. 267—280.
9. Carlitz L. (1972b). Sequences, paths, and ballot numbers. — Fibonacci Quart. **10**, p. 531—549.
10. Carlitz L. (1972c). Eulerian numbers and operators. The Theory of Arithmetic Functions (A. A. Gioia and D. L. Goldsmith, eds.) (Lecture Notes in Math. № 251). — Springer, New York.
11. Carlitz L. (1973a). Enumeration of a special class of permutations by rises. — Publ. Elek. Fak. Univ. Beogradu **451**, p. 189—196.
12. Carlitz L. (1973b). Enumeration of up-down permutations by number of rises. — Pacific J. Math. **45**, p. 49—58.
13. Carlitz L. (1973c). Enumeration of up-down sequences. — Discrete Math. **4**, p. 273—286.
14. Carlitz L. (1973d). Permutations with prescribed pattern. — Math. Nachr. **58**, p. 31—53.
15. Carlitz L. (1974a). Permutations and sequences. — Advances in Math. **14**, p. 92—120.
16. Carlitz L. (1974b). Up-down and down-up partitions. — Proc. Eulerian Series and Applications Conf. Pennsylvania State Univ.
17. Carlitz L., Riordan J. (1955). The number of labeled two-terminal series-parallel networks. — Duke Math. J. **23**, p. 435—446.
18. Carlitz L., Riordan J. (1971). Enumeration of some two-line arrays by extent. — J. Combinatorial Theory **10**, p. 271—283.
19. Carlitz L., Scoville R. (1972). Up-down sequences. — Duke Math. J. **39**, p. 583—598.
20. Carlitz L., Scoville R. (1973). Enumeration of rises and falls by position. — Discrete Math. **5**, p. 45—59.
21. Carlitz L., Scoville R. (1974). Generalized Eulerian numbers: Combinatorial applications. — J. Reine Angew. Math. **265**, p. 110—137.
22. Carlitz L., Scoville R. (1975). Enumeration of up-down permutations by upper records. — Arch. Math. (Basel).
23. Carlitz L., Roselle D., Scoville R. (1966). Permutations and sequences with repetitions by number of increases. — J. Combinatorial Theory **1**, p. 350—374.
24. Cayley A. (1876). Theorems in trigonometry and on partitions. — Coll. Math. Papers of A. Cayley **10**, p. 16.
25. Dillon J. F., Roselle D. (1968). Eulerian numbers of higher order. — Duke Math. J. **35**, p. 247—256.
26. Dillon J. F., Roselle D. (1969). Simon Newcomb's problem. — SIAM J. App. Math. **17**, p. 1086—1093.
27. Erdős P., Lehner J. (1941). The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer. — Duke Math. J. **8**, p. 335—345.
28. Foata D. (1965). Etude algébrique de certains problèmes d'analyse combinatoire et du calcul des probabilités. — Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, **14**.
29. Foata D., Riordan J. (1974). Mappings of acyclic and parking functions. — Aequationes Math. **10**, p. 10—22.

30. Foata D., Schützenberger M.-P. (1970). Théorie géométrique des polynômes eulériens (Lecture Notes in Math. № 138).—Springer, New York.
31. Foata D., Schützenberger M.-P. (1973). Nombres d'Euler et permutations alternantes. — In: A Survey of Combinatorial Theory. — North-Holland, Amsterdam, p. 173—187.
32. Foata D., Strehl V. (1974). Rearrangements of the symmetric group and enumerative properties of the tangent and secant numbers. — *Math. Z.* **137**, p. 257—264.
33. Foulkes H. O. (1975). Enumeration of permutations with prescribed up-down and inversion sequence. — *Discrete Math.* **9**, p. 365—374.
34. Fray R. D., Roselle D. (1971). Weighted lattice paths. — *Pacific J. Math.* **37**, p. 85—96.
35. Gupta H. (1942). On an asymptotic formula in partitions. — *Proc. Indian Acad. Sci.* **A16**, p. 101—102.
36. Gupta H. (1955). Partitions in general. — *Res. Bull. Panjab Univ.* **67**, p. 31—38.
37. Gupta H. (1970). Partitions—a survey. — *J. Res. Nat. Bur. Standards* **74B**, p. 1—29.
38. Kreweras G. (1965). Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers. — *Cahiers du B. U. R. O.* № 6.
39. Kreweras G. (1966). Dénombrements de chemins minimaux à sauts imposés. — *C. R. Acad. Sci. Paris* **263**, p. 1—3.
40. Kreweras G. (1967). Traitement simultané du «Problème de Young» et du Problème de Simon Newcomb. — *Cahiers du B. U. R. O.* № 10.
41. Kreweras G. (1969a). Inversion des polynômes de Bell bidimensionnels et application au dénombrement des relations binaires connexes. — *C. R. Acad. Sci. Paris* **268**, p. 577—579.
42. Kreweras G. (1969b). Dénombrement systématique de relations binaires externes. — *Math. Sci. Humaines* **7**, p. 5—15.
43. Kreweras G. (1970). Sur les éventails de segments. — *Cahiers du B. U. R. O.* № 15.
44. LeVeque W. J. (1974). *Reviews in Number Theory*, Vol. 4. — Amer. Math. Soc., Providence, R. I.
45. Long C. (1970). On a problem in partial difference equations. — *Canadian Math. Bull.* **13**, p. 333—335.
46. MacMahon P. A. (1894). Memoir on the theory of the compositions of numbers. — *Philos. Trans. Roy. Soc. London* **A184**, p. 835—901.
47. MacMahon P. A. (1908). Second memoir on the composition of numbers. *Philos. — Trans. Roy. Soc. London* **A207**, p. 65—134.
48. MacMahon P. A. (1915). *Combinatory Analysis*, Vol. 1. — Cambridge Univ. Press, London and New York (reprinted by Chelsea, New York, 1960).
49. Roselle D. (1969). Permutations by number of rises and successions. — *Proc. Amer. Math. Soc.* **19**, p. 8—16.
50. Stanley R. P. (1972). Ordered structures and partitions. — *Mem. Amer. Math. Soc.* **119**.
51. Star Z. (1976). An asymptotic formula in the theory of compositions. — *Aequationes Math.*



## ВЫРАЖЕНИЯ ХАРДИ — РАМАНУДЖАНА — РАДЕМАХЕРА ДЛЯ $p(n)$

### 5.1. Введение

Ознакомившись со многими элементарными свойствами разбиений и композиций, в том числе с элементарной асимптотической формулой для  $p_M(n)$  (теорема 4.3), мы переходим теперь к одному из высших достижений теории разбиений — к *точной формуле* для  $p(n)$  — результату Харди и Рамануджана, усовершенствованному Радемахером.

История сотрудничества Харди и Рамануджана по этой формуле весьма примечательна и, по-видимому, наилучшим образом изложена Литтлвудом в его очаровательной рецензии на книгу «Collected Papers of Srinivasa Ramanujan», опубликованной в Mathematical Gazette, 1929, 14 (полный текст рецензии на русском языке опубликован в книге: Дж. Литтлвуд, Математическая смесь, М., Наука, 1973; глава «Рецензия на собрание сочинений Рамануджана»). (Прим. перев.)

«Наконец, я должен кое-что сказать по работе о разбиениях, написанной [Рамануджаном] совместно с Харди. Число  $p(n)$  всех разбиений  $n$  быстро возрастает с ростом  $n$ :

$$p(200) = 3\,972\,999\,029\,388.$$

Авторы показывают, что  $p(n)$  есть ближайшее целое к

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{q=1}^v \sqrt{q} A_q(n) \psi_q(n), \quad (*)$$

где  $A_q(n) = \sum \omega_{p,q} e^{-2\pi p i / q}$ , а суммирование ведется по всем  $p$ , взаимно простым с  $q$  и меньшим, чем  $q$ ,  $\omega_{p,q}$  — некоторый корень  $24q$ -й степени из единицы,  $v$  — величина порядка  $\sqrt{n}$  и

$$\psi_q(n) = \frac{d}{dn} \exp \left\{ \frac{c \sqrt{n-1/24}}{q} \right\}, \quad c = \pi \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Можно взять  $v = 4$ , когда  $n = 100$ . Для  $n = 200$  можно выбрать  $v = 5$ ; пять членов ряда (\*) дают верное значение для  $p(200)$ . Можно всегда полагать  $v = a\sqrt{n}$  (или, вернее, целой части), где  $a$  — любая положительная константа, при условии, что  $n$  превосходит значение некоторого  $n_0(a)$ , зависящего лишь от  $a$ .

Вряд ли стоит убеждать читателя во всей необычности этой теоремы; с готовностью поверит он в то, что методы, которыми она была установлена, заключают в себе новый и важный принцип, плодотворно применяемый в других областях. Романтична история этой теоремы. Справедливости ради замечу, что мне придется несколько погрешить против общепринятых правил отношения к совместным работам, в связи с чем добавлю, что профессор Харди подтверждает приводимые здесь факты и считает допустимым таковое их изложение. Одна из, еще индийских, гипотез Рамануджана состояла в том, что первый член (\*) дает весьма хорошее приближение для  $p(n)$ ; это было подтверждено без особых трудностей. На этой стадии  $n = 1/24$  было представлено просто  $n$  — различие несущественно. С этой точки и началась действительная атака на задачу. Следующее, еще не очень серьезное продвижение заключалось в рассмотрении (\*) как «асимптотического» ряда, фиксированное число членов которого (например,  $v = 4$ ) давало бы ошибку порядка следующего члена. С этого момента и до самого конца Рамануджан настаивал, что на самом деле имеет место гораздо более сильное утверждение, чем то, что было установлено: «должна существовать формула с ошибкой  $O(1)$ ». Это было его важнейшим вкладом — и абсолютно по существу, и в высшей степени необычно. Проведенная скрупулезная проверка выявила необычайные факты о  $p(100)$  и  $p(200)$ . Тогда было решено сделать  $v$  функцией от  $n$ ; это действительно было огромным шагом и потребовало привлечения новых глубоких функциональных методов, которые вряд ли были бы открыты Рамануджаном самостоятельно. Теперь уже явно проступил облик теоремы.

Но преодоление финальной трудности, вероятно, было бы невозможно без еще одного вклада Рамануджана, на этот раз для него крайне характерного. Серьезнейшие аналитические трудности — это еще не все — даже подходы к теореме казались нагромождением непреодолимых препятствий чисто формального толка. Самый вид функции  $\psi_q(n)$  представлялся как нечто таинственное, единое и неделимое — среди многих асимптотических эквивалентных форм ее важно было выбрать одну, верную. Если бы правильный вид ее не был выбран с самого начала, то этот результат мог бы и не проявиться во всей полноте, поэтому-то —  $1/24$ , не говоря уже о  $d/dn$ , и кажутся удивительным взлетом аналитического гения. И здесь действительно соприкасаемся мы с реальной тайной. Если бы о существовании формулы с ошибкой  $O(1)$  было известно заранее, то можно было бы с уверенностью утверждать, что шаг за шагом в конечном итоге искомая форма функции  $\psi_q(n)$  была бы установлена. Но почему Рамануджан был так уверен в ее существовании? Теоретическим предвидением вряд ли можно объяснить этот факт. Трудно представить и чис-

ленные примеры, способные поддержать столь сильное предположение; хотя если не знать вида  $\psi_q$  заранее, то воссоздать его не помогут никакие численные примеры; так что мы, кажется, неизбежно приходим к тому, что открытию правильной формы обязаны исключительно всплеску интуиции. Этой теоремой мы обязаны особо счастливому сотрудничеству людей совершенно различных дарований, в которое каждый из них вложил наилучшую, наиболее характерную часть себя. Гений Рамануджана раскрылся в сотрудничестве не менее гениальном, чем он сам.»

Формула, которую мы будем здесь доказывать, в этой окончательной форме получена Радемахером.

**Т е о р е м а 5.1.**

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \left[ \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{sh}((\pi/k)(2/3(x-1/24))^{1/2})}{(x-1/24)^{1/2}} \right]_{x=n}, \quad (5.1.1)$$

где

$$A_k(n) = \sum_{\substack{h \bmod k \\ (h,k)=1}} \omega_{h,k} e^{-2\pi i n h/k}$$

и  $\omega_{h,k}$  — корень  $24k$ -й степени из единицы, определяемый в § 5.2.

Это необычайное тождество, в котором левой частью служит простая арифметическая функция  $p(n)$ , а правой — бесконечный ряд, включающий в себя  $\pi$ , квадратные корни, комплексные корни из единицы и производные гиперболических функций, являет собой не только чисто теоретическую формулу для  $p(n)$ , но формулу, обеспечивающую действительно быстрое вычисление.

Например,  $p(200) = 3972999029388$ , тогда как, если вычислить первые восемь членов ряда (5.1.1), получим

$$\begin{array}{r} +3972998993185,896 \\ +36282,978 \\ -87,555 \\ +5,147 \\ +1,424 \\ +0,071 \\ +0,000 \\ +0,043 \\ \hline 3972999029388,004, \end{array}$$

что и дает истинное значение  $p(n)$  с точностью 0,004. Весьма просто выявить ошибку, когда бесконечный ряд усечен; значит, можно с уверенностью определять значения  $p(n)$  прямо из (5.1.1).

Для малых значений  $n$  можно, конечно, пользоваться рекуррентностью из следствия 1.8.

Кроме того, довольно просто показать, что каждый член бесконечного ряда в (5.1.1) есть  $O(\exp\{\pi(2n)^{1/2}/k\sqrt{3}\})$ . Следовательно, первый член  $k=1$  дает нам асимптотическую формулу для  $p(n)$ ; замечая, что  $A_1(n)=1$ , без особых трудностей получаем, что при  $n \rightarrow \infty$

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left\{\pi\left(\frac{2n}{3}\right)^{1/2}\right\}. \quad (5.1.2)$$

Справедливость (5.1.1) тесно связана с тем фактом, что выражение

$$\eta(\tau) = \exp\left\{\frac{\pi i \tau}{12}\right\} \prod_{m=1}^{\infty} [1 - \exp\{2\pi i m \tau\}] = \frac{\exp\{\pi i \tau/12\}}{\sum_{n=0}^{\infty} p(n) \exp\{2\pi i n \tau\}}$$

есть в действительности модулярная форма. При доказательстве (5.1.1) мы должны использовать весьма фундаментальные свойства функции  $\eta(\tau)$ , в частности, ее поведение под действием модулярной группы:  $\tau \rightarrow (a\tau + b)/(c\tau + d)$ ,  $ad - bc = 1$ .

Для исчерпывающе полного доказательства (5.1.1) понадобились бы по крайней мере две дополнительные главы: одна — посвященная модулярной группе и ее основным свойствам (см. [24, гл. 1] или [27, гл. 1]), а другая — содержащая формулы фундаментальных преобразований для  $\eta(\tau)$  (см. [24, гл. 3]). Такое изложение увело бы нас далеко от разбиений, и поэтому в начале § 5.2 мы просто приводим необходимую нам в дальнейшем формулу преобразований.

## 5.2. Формула для $p(n)$

Вместо преобразования для  $\eta(\tau)$  мы привлекаем некоторый эквивалентный результат, более подходящий нашим целям. Именно, пусть

$$P(q) = \sum_{n \geq 0} p(n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}; \quad (5.2.1)$$

тогда

$$P\left(\exp\left\{\frac{2\pi i(h+iz)}{k}\right\}\right) = \omega_{h,k} z^{1/2} \exp\left\{\frac{\pi(z^{-1}-z)}{12k}\right\} P\left(\exp\left\{\frac{2\pi i(h'+iz^{-1})}{k}\right\}\right), \quad (5.2.2)$$

где  $\operatorname{Re} z > 0$ , выбирается главная ветвь  $z^{1/2}$ ,  $h'$  есть решение сравнения

$$hh' \equiv -1 \pmod{k}, \quad (5.2.3)$$

а  $\omega_{h,k}$  — корень  $24k$ -й степени из единицы:

$$\omega_{h,k} = \begin{cases} \left( \left( \frac{-k}{h} \right) \exp \left\{ -\pi i \left( \frac{1}{4} (2 - hk - h) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{12} (k - k^{-1}) (2h - h' + h^2 h') \right) \right\} \right), & \text{если } h \text{ нечетно,} \\ \left( \left( \frac{-h}{k} \right) \exp \left\{ -\pi i \left( \frac{1}{4} (k - 1) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{12} (k - k^{-1}) (2h - h' + h^2 h') \right) \right\} \right), & \text{если } k \text{ нечетно,} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

и  $(a/b)$  — символ Лежандра—Якоби. Доказательство (5.2.2) см. в [24, гл. 3] или [33, гл. 9] \*); имеется доказательство (5.2.2), принадлежащее Берндту, кратко обрисованное в задачах 6—17 в конце этой главы.

Отметим, кстати, изящное представление Радемахера для  $\omega_{h,k}$ :

$$\omega_{h,k} = \exp \{ \pi i s(h, k) \}, \quad (5.2.5)$$

где  $s(h, k)$  — сумма Дедекинда:

$$s(h, k) = \sum_{\mu=1}^{k-1} \left( \frac{\mu}{k} - \left[ \frac{\mu}{k} \right] - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{h\mu}{k} - \left[ \frac{h\mu}{k} \right] - \frac{1}{2} \right). \quad (5.2.6)$$

Теперь мы переходим к поистине замечательному способу подсчета  $p(n)$ , осуществленному Харди и Рамануджаном. Интегральная теорема Коши влечет, что

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P(x)}{x^{n+1}} dx, \quad (5.2.7)$$

где  $C$  — круг с центром в начале координат, включающий в себя единичную окружность  $|x| = 1$ . Как вычислить этот интеграл?

Обращаясь к производящей функции  $P(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1}$ ,

видим, что каждое частичное произведение  $\prod_{n=1}^N (1 - x^n)^{-1}$  имеет полюс порядка  $N$  при  $x = 1$ , полюс порядка  $[N/2]$  при  $x = -1$ , полюсы порядка  $[N/3]$  при  $x = \exp \{2\pi i/3\}$  и  $x = \exp \{4\pi i/3\}$  и так далее. Кроме того, отметим, что (5.2.2) дает достаточно хорошую информацию о поведении  $P(x)$  вблизи  $\exp \{2\pi i h/k\}$ ; именно, если  $z \rightarrow 0$  ( $\operatorname{Re} z > 0$ ), то

$$P \left[ \exp \left\{ \frac{2\pi i h}{k} - \frac{2\pi z}{k} \right\} \right] \sim \omega_{h,k} z^{1/2} \exp \left\{ \frac{\pi (z - z^{-1})}{12k} \right\}. \quad (5.2.8)$$

\*) См. также [38, гл. 7; 39, гл. 7]. (Прим. ред.)

Ясно, что круг интегрирования нужно разбить на сегменты так, чтобы с наибольшей эффективностью можно было применять (5.2.8), конечно, учитывая, к какой рациональной точке мы близки (если  $\alpha$  рационально, то  $\exp(2\pi i \alpha)$  будем называть рациональной точкой единичной окружности). К сожалению, эти рациональные точки расположены на единичной окружности весьма плотно, и, значит, такой способ не совсем удобен. Дабы все-таки добиться эффективности этого подхода, отметим, что точки  $\exp(2\pi i h/k)$  оказываются наиболее важными особенностями именно при малых  $k$ , поэтому вместо рассмотрения плотного множества всех рациональных точек ограничим наше внимание дискретным множеством тех рациональных точек  $\exp(2\pi i h/k)$ , для которых  $0 < k \leq N$ , где  $N$  — фиксированное положительное целое.

Таким образом, мы концентрируем наше внимание на  $F_N$  — множестве правильных дробей Фарея порядка  $N$ . Например, при  $N = 5$

$$F_5 = \{0, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1\}.$$

Наблюдая, сколь естественным образом возникают дроби Фарея, резонно предположить, что нужно разбивать наш круг  $S$  радиуса  $\rho$  на сегменты, в каком-то смысле «центрированные» вокруг рациональных точек  $\rho \exp(2\pi i h/k)$ , где  $h/k \in F_N$ . В поисках оптимального «сегментирования» нам придется исходить из элементарных свойств  $F_N$ . Хорошо известно (и легко проверяется), что если  $h/k, h_1/k_1$  — соседние члены в  $F_N$ , то рациональное число с наименьшим знаменателем, лежащее строго между  $h/k$  и  $h_1/k_1$ , есть дробь  $(h + h_1)/(k + k_1)$ , называемая *медиантой* дробей  $h/k$  и  $h_1/k_1$ . Представляется вполне естественным использование медиант в качестве концов интервалов, определяющих сегментирование  $S$ . Для  $h_0/k_0, h/k, h_1/k_1$  — трех последовательных членов  $F_N$  — положим

$$\begin{aligned}\theta'_{0,1} &= \frac{1}{N+1}, \\ \theta'_{h,k} &= \frac{h}{k} - \frac{h_0 + h}{k_0 + h}, \quad h > 0, \\ \theta''_{h,k} &= \frac{h_1 + h}{k_1 + h} - \frac{h}{k}.\end{aligned}\tag{5.2.9}$$

Тогда ясно, что

$$\begin{aligned}p(n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P(x)}{x^{n+1}} dx = \\ &= \rho^{-n} \int_0^1 P[\rho \exp\{2\pi i \varphi\}] \exp\{-2\pi i n \varphi\} d\varphi =\end{aligned}$$

$$= \rho^{-n} \sum_{\substack{k=1 \\ (h,k)=1 \\ 0 \leq h < k}}^N \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} P \left[ \rho \exp \left\{ \frac{2\pi i h}{k} + 2\pi i \varphi \right\} \right] \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{2\pi i n h}{k} - 2\pi i n \varphi \right\} d\varphi. \quad (5.2.10)$$

Все, что осталось сделать перед применением (5.2.2), — это подходящим образом выбрать радиус  $\rho$ , который, конечно, можно наилучшим образом подобрать и по окончании вычислений, однако для простоты произведем этот «правильный выбор» сразу:

$$\rho = \exp \{ -2\pi/N^2 \} \quad (5.2.11)$$

(последовательно подчеркивая, далее, необходимость именно такого выбора). Таким образом,

$$p(n) = \exp \left\{ \frac{2\pi n}{N^2} \right\} \sum_{\substack{k=1 \\ (h,k)=1 \\ 0 \leq h < k}}^N \exp \left\{ -\frac{2\pi i h n}{k} \right\} \times \\ \times \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} P \left[ \exp \left\{ \frac{2\pi i h}{k} - \frac{2\pi}{k} \left( \frac{k}{N^2} - i k \varphi \right) \right\} \right] \exp \{ -2\pi i n \varphi \} d\varphi; \quad (5.2.12)$$

для применения (5.2.2) мы должны ввести

$$z = k(N^{-2} - i\varphi). \quad (5.2.13)$$

Следовательно, применяя (5.2.2) к подынтегральному выражению в (5.2.12), находим, что

$$p(n) = \exp \left\{ \frac{2\pi n}{N^2} \right\} \sum_{\substack{k=1 \\ (h,k)=1 \\ 0 \leq h < k}}^N \exp \left\{ -\frac{2\pi i h n}{k} \right\} \omega_{h,k} \times \\ \times \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} z^{1/2} \exp \left\{ \pi \frac{z^{-1} - z}{12k} \right\} P \left[ \exp \left\{ 2\pi i \frac{h' + i z^{-1}}{k} \right\} \right] \exp \{ -2\pi i n \varphi \} d\varphi. \quad (5.2.14)$$

Теперь видно, что  $\exp \{ 2\pi i (h' + i z^{-1})/k \}$  весьма быстро стремится к нулю при  $z \rightarrow 0$ ,  $\operatorname{Re} z > 0$ . Стало быть, простейший путь

оценивания (5.2.14) состоит в представлении под интегралом  $P(x)$  в виде  $1 + (P(x) - 1)$ . Поэтому

$$\begin{aligned}
 p(n) = & \exp \left\{ \frac{2\pi n}{N^2} \right\} \sum_{\substack{k=1 \\ (h,k)=1 \\ 0 \leq h < k}}^N \exp \left\{ -\frac{2\pi i h n}{k} \right\} \omega_{h,k} \times \\
 & \times \int_{-\theta_{h,k}''}^{\theta_{h,k}''} z^{1/2} \exp \left\{ \pi \frac{z^{-1} - z}{12k} - 2\pi i n \varphi \right\} d\varphi + \\
 & + \exp \left\{ \frac{2\pi n}{N^2} \right\}' \sum_{\substack{k=1 \\ (h,k)=1 \\ 0 \leq h < k}}^N \exp \left\{ -\frac{2\pi i h n}{k} \right\} \omega_{h,k} \int_{-\theta_{h,k}''}^{\theta_{h,k}''} z^{1/2} \exp \left\{ \pi \frac{z^{-1} - z}{12k} \right\} \times \\
 & \times \left( P \left[ \exp \left\{ 2\pi i \frac{h' + iz^{-1}}{k} \right\} \right] - 1 \right) \exp \{ -2\pi i n \varphi \} d\varphi = \Sigma_1 + \Sigma_2. \quad (5.2.15)
 \end{aligned}$$

Естественно ожидать, что в таком представлении  $p(n)$  слагаемое  $\Sigma_1$  дает основной вклад, а слагаемым  $\Sigma_2$  можно пренебречь. С доказательства несущественности  $\Sigma_2$  и начнем наш изнурительный анализ (5.2.15). Во-первых (помня, что  $z = kN^{-2} - ik\varphi$ ), имеем

$$\begin{aligned}
 & \left| z^{1/2} \exp \left\{ \pi \frac{z^{-1} - z}{12k} \right\} \left( P \left[ \exp \left\{ 2\pi i \frac{h' + iz^{-1}}{k} \right\} \right] - 1 \right) \right| \leq \\
 & \leq |z|^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\pi}{12N^2} \right\} \sum_{m=1}^{\infty} p(m) \exp \left\{ -2\pi \operatorname{Re}(z^{-1}) \frac{m - 1/24}{k} \right\}. \quad (5.2.16)
 \end{aligned}$$

Теперь

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{kN^{-2} - ik\varphi} = \frac{N^{-2} + i\varphi}{k(N^{-4} + \varphi^2)}.$$

Из (5.2.9) непосредственно следует, что каждое из  $\theta_{h,k}'$  и  $\theta_{h,k}''$  заключено между  $\frac{1}{2kN}$  и  $\frac{1}{kN}$ , а поскольку  $-\theta_{h,k}' \leq \varphi \leq \theta_{h,k}''$ , то

$$\frac{1}{k} \operatorname{Re} z^{-1} = \frac{N^{-2}}{k^2(N^{-4} + \varphi^2)} > \frac{N^{-2}}{k^2 N^{-4} + N^{-2}} = \frac{1}{1 + k^2 N^{-2}} \geq \frac{1}{2}. \quad (5.2.17)$$

Кроме того,

$$|z|^{1/2} = (k^2 N^{-4} + k^2 \varphi^2)^{1/4} < (k^2 N^{-4} + N^{-2})^{1/4} \leq 2^{1/4} N^{-1/2}. \quad (5.2.18)$$



Поэтому согласно (5.2.16), (5.2.17) и (5.2.18) получаем следующую оценку для  $\Sigma_2$ :

$$\begin{aligned}
 |\Sigma_2| &\leq \exp\left\{\frac{2\pi n}{N^2}\right\} \sum_{\substack{k=1 \\ (h,k)=1 \\ 0 \leq h < k}}^N 2^{1/4} N^{-1/2} \exp\left\{-\frac{\pi}{12N^2}\right\} \times \\
 &\quad \times \sum_{m=1}^{\infty} p(m) \exp\left\{-\pi\left(m - \frac{1}{24}\right)\right\} \int_{-\theta''_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} d\varphi \leq \\
 &\leq \exp\left\{\frac{2\pi n}{N^2} - \frac{\pi}{12N^2}\right\} 2^{1/4} N^{-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} p(m) \exp\left\{-\pi\left(m - \frac{1}{24}\right)\right\} \times \\
 &\quad \times \sum_{\substack{k=1 \\ (h,k)=1 \\ 0 \leq h < k}}^N \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} d\varphi = \exp\left\{\frac{2\pi n}{N^2} - \frac{\pi}{12N^2}\right\} 2^{1/4} N^{-1/2} \times \\
 &\quad \times \sum_{m=1}^{\infty} p(m) \exp\left\{-\pi\left(m - \frac{1}{24}\right)\right\} \leq CN^{-1/2} \exp\left\{\frac{2\pi n}{N^2}\right\}. \quad (5.2.19)
 \end{aligned}$$

Такая оценка устраивает нас, поскольку  $N^{-1/2} \exp(2\pi n N^{-2}) \rightarrow 0$ , когда  $N \rightarrow \infty$  при фиксированном  $n$ .

Займемся теперь оценкой главного члена  $\Sigma_1$  в (5.2.15). Здесь мы покажем, что этот интеграл есть наиболее значительная часть контурного интеграла типа Ханкеля. По установлении этого факта (равенства (5.2.26)) будет уже довольно просто завершить наше оценивание  $p(n)$ .

В интеграле  $\Sigma_1$  (см. (5.2.15)) положим  $\omega = N^{-2} - i\varphi$ ; тем самым этот интеграл принимает вид

$$\begin{aligned}
 I_{h,k} &= \exp\left\{-\frac{2\pi n}{N^2}\right\} \int_{N^{-2} + i\theta'_{h,k}}^{N^{-2} - i\theta''_{h,k}} (k\omega)^{1/2} \exp\left\{\frac{\pi}{12k}\left(\frac{1}{k\omega} - k\omega\right) + 2\pi n\omega\right\} i d\omega = \\
 &= \exp\left\{-\frac{2\pi n}{N^2}\right\} k^{1/2} i^{-1} \times \\
 &\quad \times \int_{N^{-2} - i\theta''_{h,k}}^{N^{-2} + i\theta'_{h,k}} \omega^{1/2} \exp\left\{2\pi\left(n - \frac{1}{24}\right)\omega + \frac{\pi}{12k^2\omega}\right\} d\omega = \\
 &= \exp\left\{-\frac{2\pi n}{N^2}\right\} k^{1/2} i^{-1} \int_{N^{-2} - i\theta''_{h,k}}^{N^{-2} + i\theta'_{h,k}} g(\omega) d\omega, \quad (5.2.20)
 \end{aligned}$$

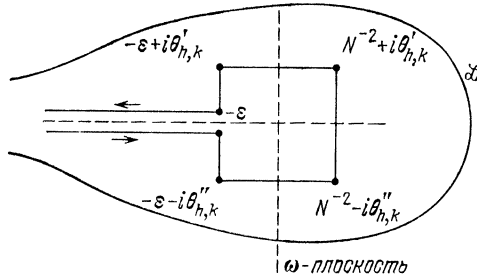
где

$$g(\omega) = \omega^{1/2} \exp \left\{ 2\pi \left( n - \frac{1}{24} \right) \omega + \frac{\pi}{12k^2\omega} \right\}.$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле однозначно и аналитично в комплексной  $\omega$ -плоскости, разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси. Поэтому по теореме Коши можно записать

$$\begin{aligned} \exp \{ 2\pi n N^{-2} \} I_{h,k} = \\ = \frac{k^{1/2}}{i} \left( \int_{-\infty}^{(0+)} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon - i\theta''_{h,k}} - \int_{-\varepsilon - i\theta''_{h,k}}^{N^{-2} - i\theta''_{h,k}} - \int_{N^{-2} - i\theta''_{h,k}}^{-\varepsilon + i\theta'_{h,k}} - \int_{-\varepsilon + i\theta'_{h,k}}^{-\varepsilon} - \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \right) \times \\ \times g(\omega) d\omega, \quad (5.2.21) \end{aligned}$$

где  $\int_{-\infty}^{(0+)}$  — контурный интеграл по контуру  $\mathcal{L}$ :



Предположим, что  $0 < \varepsilon < N^{-2}$ , и посмотрим, что происходит при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для краткости перепишем (5.2.21) в виде

$$\exp \{ 2\pi n N^{-2} \} I_{h,k} = k^{1/2} i^{-1} \{ L_k - I_1 - I_2 - I_3 - I_4 - I_5 - I_6 \}. \quad (5.2.22)$$

Наша следующая задача — показать, что каждым из четырех интегралов  $I_2, I_3, I_4, I_5$  можно пренебречь. Имеем

$$\begin{aligned} |I_2| \leq \int_0^{-\theta''_{h,k}} (\varepsilon^2 + v^2)^{1/4} \exp \left\{ \frac{\pi}{12k^2} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{-\varepsilon + iv} \right) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -2\pi \left( n - \frac{1}{24} \right) \varepsilon \right\} |dv|. \end{aligned}$$

Но  $\operatorname{Re} [(-\varepsilon + iv)^{-1}] = -\varepsilon/(\varepsilon^2 + v^2) < 0$ , и, значит,

$$\begin{aligned} |I_2| < (\varepsilon^2 + \theta_{h,k}^2)^{1/4} \theta''_{h,k} < \left( \varepsilon^2 + \frac{1}{k^2 N^2} \right)^{1/4} \frac{1}{kN} \rightarrow k^{-3/2} N^{-3/2}, \\ \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

Интеграл  $I_5$  оценивается тем же способом, и для него справедлива та же оценка (5.2.23) (с заменой  $I_2$  на  $I_5$ ).

Для  $I_3$  получаем

$$|I_3| \leq \int_{-\varepsilon}^{N-2} (u^2 + \theta_{h,k}^{\prime 2})^{1/4} \exp \left\{ \frac{\pi}{12k^2} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{u - i\theta_{h,k}^{\prime \prime}} \right) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ 2\pi \left( n - \frac{1}{24} \right) u \right\} du.$$

Но

$$\frac{1}{k^2} \operatorname{Re} [(u - i\theta_{h,k}^{\prime \prime})^{-1}] = \frac{u}{k^2 (u^2 + \theta_{h,k}^{\prime 2})} \leq \frac{N^{-2}}{k^2 \theta_{h,k}^{\prime 2}} \leq 4.$$

Поэтому

$$|I_3| < \left( \frac{1}{N^4} + \theta_{h,k}^{\prime 2} \right)^{1/4} \exp \left\{ \frac{\pi}{3} \right\} \exp \left\{ \frac{2\pi n}{N^2} \right\} \left( \varepsilon + \frac{1}{N^2} \right) < \\ < \left( \frac{1}{N^4} + \frac{1}{k^2 N^2} \right)^{1/4} \exp \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{N^2} \right\} \left( \varepsilon + \frac{1}{N^2} \right) \leq \\ \leq \left( \varepsilon + \frac{1}{N^2} \right) \frac{2^{1/4}}{k^{1/2} N^{1/2}} \exp \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{N^2} \right\} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{2^{1/4}}{k^{1/2} N^{5/2}} \exp \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{N^2} \right\}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.2.24)$$

Здесь опять-таки (5.2.24) выполняется и для  $I_5$  при замене  $I_3$  на  $I_5$ .

Интегралы  $I_1$  и  $I_6$  несущественными не являются, однако

$$I_1 + I_6 = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} |u|^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\pi i}{2} \right\} \exp \left\{ \frac{\pi}{12k^2 u} + 2\pi \left( n - \frac{1}{24} \right) u \right\} du + \\ + \int_{-\varepsilon}^{+\infty} |u|^{1/2} \exp \left\{ \frac{\pi i}{2} \right\} \exp \left\{ \frac{\pi}{12k^2 u} + 2\pi \left( n - \frac{1}{24} \right) u \right\} du = \\ = -2i \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{1/2} \exp \left\{ -2\pi \left( n - \frac{1}{24} \right) t - \frac{\pi}{12k^2 t} \right\} dt = -2i H_k. \quad (5.2.25)$$

Поэтому, устремляя  $\varepsilon$  к нулю в (5.2.22), упрощаем это равенство:

$$\exp \left\{ \frac{2\pi n}{N^2} \right\} I_{h,k} = \frac{k^{1/2}}{i} L_k + 2k^{1/2} H_k + O \left( \frac{1}{kN^{3/2}} \right) + \\ + O \left( \exp \left\{ \frac{2\pi n}{N^2} \right\} N^{-5/2} \right), \quad (5.2.26)$$

где все константы в  $O$  абсолютны. Следовательно, полагая

$$\psi_k(n) = \frac{k^{1/2}}{i} L_k + 2k^{1/2} H_k, \quad (5.2.27)$$

из (5.2.15), (5.2.19) и (5.2.26) видим, что

$$\begin{aligned} p(n) &= \sum_{\substack{k=1 \\ (h,k)=1 \\ 0 \leq h < k}}^N \left( \omega_{h,k} \exp \left\{ -\frac{2\pi i h n}{k} \right\} \psi_k(n) \right) + O \left( \exp \left\{ \frac{2\pi n}{N^2} \right\} N^{-1/2} \right) + \\ &+ O \left( \sum_{\substack{k=1 \\ (h,k)=1 \\ 0 \leq h < k}}^N \frac{1}{k N^{3/2}} \right) + O \left( \sum_{\substack{k=1 \\ (h,k)=1 \\ 0 \leq h < k}}^N \exp \left\{ \frac{2\pi n}{N^2} \right\} N^{-5/2} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k(n) \psi_k(n) + O \left( \frac{1}{N^{1/2}} \exp \left\{ \frac{2\pi n}{N^2} \right\} \right) + O \left( \frac{1}{N^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

Теперь  $A_k(n)$  имеет в точности тот же вид, что и в (5.1.1), а последние слагаемые оба стремятся к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Поэтому последняя для нас задача состоит в том, чтобы показать, что

$$\psi_k(n) = \frac{k^{1/2}}{2^{1/2}\pi} \left( \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{sh}((\pi/k)((2/3)(x-1/24))^{1/2})}{(x-1/24)^{1/2}} \right)_{x=n}. \quad (5.2.29)$$

А это уже можно сделать довольно легко, привлекая некоторые классические результаты об интегралах Ханкеля. Во-первых,

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} L_k &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{(0+)} \omega^{1/2} \exp \left\{ \frac{\pi}{12k^2\omega} + 2\pi \left( n - \frac{1}{24} \right) \omega \right\} d\omega = \\ &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{(0+)} \omega^{1/2} \exp \left\{ 2\pi \left( n - \frac{1}{24} \right) \omega \right\} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\pi/(12k^2\omega))^s}{s!} d\omega = \\ &= \frac{1}{i} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\pi/(12k^2))^s}{s!} \int_{-\infty}^{(0+)} \omega^{1/2-s} \exp \left\{ 2\pi \left( n - \frac{1}{24} \right) \omega \right\} d\omega = \\ &= 2\pi \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\pi/(12k^2))^s}{s!} \left[ 2\pi \left( n - \frac{1}{24} \right) \right]^{s-3/2} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^z}{z^{s-1/2}} dz = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left( n - \frac{1}{24} \right)^{-3/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{[\pi^2 (n - 1/24)/(6k^2)]^s}{s! \Gamma(s - 1/2)}, \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из формулы Ханкеля для представления гамма-функции в виде контурного интеграла:

$$\frac{1}{\Gamma(s-1/2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^z}{z^{s-1/2}} dz.$$

Но

$$\begin{aligned} \Gamma(s-1/2) &= (s-3/2)(s-5/2)\dots\Gamma(1/2)/2 = \\ &= 2^{-s+1}\pi^{1/2}(2s-3)(2s-5)\dots 3\cdot 1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(Y^2/4)^s}{s! \Gamma(s-1/2)} &= \frac{1}{2\pi^{1/2}} \left( -1 + Y^2 \left( \frac{1}{2!} + \frac{3Y^2}{4!} + \frac{5Y^4}{6!} + \dots \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi^{1/2}} \left( -1 + Y^2 \frac{d}{dY} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y^{2n+1}}{(2n+2)!} \right) = \frac{1}{2\pi^{1/2}} \left( -1 + Y^2 \frac{d}{dY} \left( \frac{\operatorname{ch} Y - 1}{Y} \right) \right), \end{aligned}$$

и, значит, при  $Y = \frac{\pi}{k} \left( \frac{2}{3} \left( x - \frac{1}{24} \right) \right)^{1/2}$  видим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} L_k &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left( n - \frac{1}{24} \right)^{-3/2} \frac{1}{2\pi^{1/2}} \left( -1 + Y^2 \frac{d}{dY} \left( \frac{\operatorname{ch} Y - 1}{Y} \right) \right)_{x=n} = \\ &= \frac{1}{2^{3/2}\pi} \left( n - \frac{1}{24} \right)^{-3/2} \left( Y^2 \frac{d}{dY} \left( \frac{\operatorname{ch} Y}{Y} \right) \right)_{x=n} = \\ &= \frac{1}{2^{3/2}\pi} \left( n - \frac{1}{24} \right)^{-3/2} \left[ Y^2 \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{\operatorname{ch} Y}{Y} \right) \right) / \frac{dY}{dx} \right]_{x=n} = \\ &= \frac{1}{2^{3/2}\pi} \left( n - \frac{1}{24} \right)^{-3/2} \left( \frac{3k^2 Y^3}{\pi^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\operatorname{ch} Y}{Y} \right) \right)_{x=n} = \\ &= \frac{1}{3^{1/2}k} \left[ \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{ch}((\pi/k)((2/3)(x-1/24))^{1/2})}{(\pi/k)((2/3)(x-1/24))^{1/2}} \right]_{x=n} = \\ &= \frac{1}{2^{1/2}\pi} \left[ \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{ch}((\pi/k)((2/3)(x-1/24))^{1/2})}{(x-1/24)^{1/2}} \right]_{x=n}. \quad (5.2.30) \end{aligned}$$

Наконец, аналогично проанализируем  $H_k$  из (5.2.27). Начнем с классического вычисления определенного интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp\{-c^2 t - a^2 t^{-1}\}}{t^{1/2}} dt = 2 \int_0^{\infty} \exp\left\{-c^2 u^2 - \frac{a^2}{u^2}\right\} du = \frac{\pi^{1/2}}{c} \exp\{-2ac\}.$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp\{-c^2 t - a^2 t^{-1}\}}{t^{1/2}} dt = -\frac{\pi^{1/2}}{2c} \frac{d}{dc} \frac{\exp\{-2ac\}}{c}, \quad (5.2.31)$$

и, применяя (5.2.31) к  $H_k$ , видим, что

$$\begin{aligned} H_k &= -\frac{1}{4\pi^{1/2}(n-1/24)} \left( \frac{d}{dc} \frac{\exp \{-\pi (2/3)^{1/2} c/k\}}{(2\pi)^{1/2} c} \right)_{c=(n-1/24)^{1/2}} = \\ &= -\frac{1}{2^{3/2}\pi} \left[ \frac{d}{dx} \frac{\exp \{-\pi (2/3)^{1/2} (x-1/24)^{1/2}/k\}}{(x-1/24)^{1/2}} \right]_{x=n}. \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

Таким образом, из (5.2.27), (5.2.30) и (5.2.32) получаем

$$\begin{aligned} \Psi_k(n) &= \frac{k^{1/2}}{2^{1/2}\pi} \left[ \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{ch}((\pi/k) ((2/3)(x-1/24))^{1/2})}{(x-1/24)^{1/2}} \right]_{x=n} - \\ &- \frac{k^{1/2}}{2^{1/2}\pi} \left[ \frac{d}{dx} \frac{\exp \{-\pi/k ((2/3)(x-1/24))^{1/2}\}}{(x-1/24)^{1/2}} \right]_{x=n} = \\ &= \frac{k^{1/2}}{2^{1/2}\pi} \left[ \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{sh}((\pi/k) ((2/3)(x-1/24))^{1/2})}{(x-1/24)^{1/2}} \right]_{x=n}, \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

а поскольку (5.2.33) и есть в точности (5.2.29), то теорема 5.1 полностью доказана.

### Задачи

1. Показать, что число разбиений  $n$  не более чем с двумя частями ( $= p(\langle \{1, 2\}, n) \rangle$ ) по теореме 1.4 равно  $[n/2] + 1$ ; использовать следующее разложение производящей функции:

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)} = \frac{1/2}{(1-q)^2} + \frac{1/2}{(1-q^2)}.$$

2. Показать, что число разбиений  $n$  не более чем с тремя частями ( $= p(\langle \{1, 2, 3\}, n) \rangle$ ) по теореме 1.4 есть ближайшее целое к  $(1/12)(n+3)^2$ ; использовать следующее разложение производящей функции:

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} = \frac{1/6}{(1-q)^3} + \frac{1/4}{(1-q)^2} + \frac{1/4}{(1-q^2)} + \frac{1/3}{(1-q^3)}.$$

Заметим, что задачи 1, 2 являются специальными случаями общего представления Кэли:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^i)} = \\ &= \sum \frac{1}{1^{p_1} 2^{p_2} 3^{p_3} \dots i^{p_i} p_1! p_2! \dots p_i! (1-q)^{p_1} (1-q^2)^{p_2} \dots (1-q^i)^{p_i}}, \end{aligned}$$

в котором суммирование ведется по всем разбиениям  $(1^{p_1} 2^{p_2} 3^{p_3} \dots i^{p_i})$  числа  $i$ . Эта формула представлена в задаче 1 гл. 12 как специальный случай некоторых результатов о многочленах Белла.

3\*. Помимо  $\eta$  ( $\tau$ ) имеется много модулярных функций, обладающих формулами преобразований, подобными формуле (5.2.2). В [10—17, 34] показано, что если  $H$  — множество целых, сравнимых с  $\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_r$  по модулю  $k$ , то существует представление для  $p(H, n)$  в виде ряда такой же формы, как в теореме 5.1. В действительности то же верно и для  $p(H) (\leq t, n)$ . В качестве при-

мера можно рассмотреть такой ряд для  $p(\mathcal{D}, n) = p(\mathcal{O}, n)$  (следствие 1.2), который разными способами был получен Хуа Ло Кеном, Исеки и Хагисом:

$$p(\mathcal{D}, n) = \pi \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечетно}}}^{\infty} \left[ \sum_{\substack{h \bmod k \\ (h, k) = 1}} \chi(h, k) \exp \left\{ \frac{-2\pi i n h}{k} \right\} \right] \times \\ \times \frac{1}{k(24n+1)^{1/2}} I_1 \left[ \frac{\pi}{12k} (48n+2)^{1/2} \right],$$

где

$$I_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!},$$

а  $\chi(h, k)$  — корень из единицы, возникающий из модулярных преобразований для  $\sum_{n \geq 0} p(\mathcal{D}, n) q^n$  точно так же, как  $\omega_{h, k}$  из (5.2.2).

4. Помимо модулярных функций имеется класс функций, называемых *мэта-подобными* функциями (введенных и изучавшихся Рамануджаном и Ватсоном; см. задачу 12, гл. 2), для которых можно получать приемлемые представления для коэффициентов. Например, пусть

$$f(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1+q)^2(1+q^2)^2 \dots (1+q^n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n.$$

Тогда можно показать, что

$$a_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\sqrt{n}} (-1)^{[(k+1)/2]} A_{2k} \left( \left( n - \frac{1}{4} (1 + (-1)^k) k \right) (k(n - 1/24))^{-1/2} \right) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{\pi}{6^{1/2}k} \left( n - \frac{1}{24} \right)^{1/2} \right\} + O(n^e),$$

где  $A_k(n)$  — то же, что и в теореме 5.1.

Драгонетт указал на возможность того, что ошибка в этом выражении для  $a_n$  вообще может быть меньше, чем  $1/2$ , по абсолютной величине. В частности, сумма при  $n = 100$  дает  $-18520.206$ , тогда как  $a_{100} = -18520$ ; при  $n = 200$  сумма дает  $-2660007.847$ , тогда как  $a_{200} = -2660008$ .

5. Доказательство результата из задачи 4 основывается на том факте, что

$$(q)_{\infty} f(q) = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(3n+1)/2}}{1+q^n}.$$

Эта формула, принадлежащая Ватсону, выводима техникой, подобной той, что используется в § 7.2.

Задачи 6—17 бегло очерчивают доказательство формулы (5.2.2) для  $\eta(z) = e^{\pi i z/12}/P(e^{2\pi i z})$ . Все следующие функции играют большую роль в этом доказательстве:

$$G(z, s) = \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{\infty} (mz + n)^{-s}, \quad -\pi \leq \arg s < \pi, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad \operatorname{Re} z > 2; \\ Vz = (az + b)/(cz + d),$$

где  $a, b, c, d$  — целые, причем  $c > 0$  и  $ad - bc = 1$ ;

$$g(z, s) = \sum_{\substack{m \leq 0 \\ dm - cn > 0}} (mz + n)^{-s}$$

(условия на  $G(z, s)$  распространяются также и на  $g(z, s)$ );

$$h(z, s) = \sum_{\substack{m > 0 \\ n > dm/c}} (mz + n)^{-s}$$

(с теми же условиями);

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1} e^{-u} du, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

(это интегральное представление Эйлера для гамма-функции);

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1$$

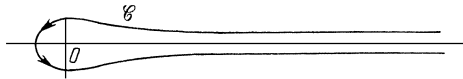
дзета-функция Римана);

$$A(z, s) = \sum_{m, n \geq 1} n^{s-1} e^{2\pi i m n z}, \quad \operatorname{Im} z > 0;$$

$$H(z, s) = (1 + e^{\pi i s}) A(z, s);$$

$$L(z, s) = \sum_{j=1}^c \int_{\mathcal{C}} \frac{u^{s-1} e^{-(cz+d)ju/c} e^{\{jd/c\}u}}{(1 - e^{-(cz+d)u})(e^u - 1)} du,$$

где  $\{x\} = x - [x]$ ;  $[x]$  — наибольшее целое, не превосходящее  $x$ , а  $\mathcal{C}$  — следующий контур в  $u$ -плоскости, ориентированный против часовой стрелки:



6. Легко показать, что  $A(z, 0) = (\pi iz/12) - \log \eta(z)$ ; нужно лишь использовать тот факт, что  $\log(1 - w)^{-1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{w^n}{n}$ .

$$7. \frac{G(Vz, s)}{(cz + d)^s} = e^{-2\pi i s} \sum_{\substack{m \leq 0 \\ dm - cn > 0}} (mz + n)^{-s} + \sum_{\substack{m > 0 \\ \text{или} \\ dm - cn \leq 0}} (mz + n)^{-s} =$$

$$= G(z, s) + (e^{-2\pi i s} - 1) g(z, s).$$

$$8. g(z, s) = e^{\pi i s} \zeta(s) + e^{\pi i s} h(z, s).$$



9. Для  $\operatorname{Re} z > -d/c$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$

$$\begin{aligned}\Gamma(s) h(z, s) &= \sum_{\substack{m>0 \\ n>d/c}} \int_0^\infty u^{s-1} \exp\{-mzu - nu\} du = \\ &= \sum_{m', n'=0}^\infty \int_0^\infty u^{s-1} \exp\left\{-(m'+1)zu - \left(n'+1 + \left[\frac{m'd+d}{c}\right]\right)u\right\} du,\end{aligned}$$

где  $m' = m - 1$ ,  $n' = n - [md/c] - 1$ ; здесь  $[x]$  — целая часть  $x$ .

10. Если во второй сумме из задачи 9 заменить  $n'$  на  $n$  и положить  $m' = pc + j - 1$ ,  $0 \leq p < \infty$ ,  $1 \leq j \leq c$ , то это повлечет, что

$$\begin{aligned}\Gamma(s) h(z, s) &= \\ &= \sum_{j=1}^c \int_0^\infty u^{s-1} \exp\left\{-jzu - \left(1 + \left[\frac{jd}{c}\right]\right)u\right\} \sum_{p, n \geq 0}^\infty \exp\{-p(cz+d)u - nu\} du = \\ &= \sum_{j=1}^c \int_0^\infty \frac{u^{s-1} \exp\{-(cz+d)ju/c + \{jd/c\}u\}}{(1 - \exp\{-(cz+d)u\})(\exp u - 1)} du = \\ &= (1 - \exp 2\pi is)^{-1} \sum_{j=1}^c \int_{\mathcal{C}} \frac{u^{s-1} \exp\{-(cz+d)ju/c + \{jd/c\}u\}}{(1 - \exp\{-(cz+d)u\})(\exp u - 1)} du.\end{aligned}$$

11. Применяя задачу 10 к задаче 8 (а значит, и к задаче 7), находим, что для  $\operatorname{Re} s > 2$ ,  $\operatorname{Re} z > -d/c$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$

$$(cz+d)^{-s} \Gamma(s) G(Vz, s) = \Gamma(s) G(z, s) - 2i \sin \pi s \Gamma(s) \zeta(s) + e^{-\pi is} L(z, s).$$

12\* (формула суммирования Липшица). Для  $\operatorname{Im} z > 0$  и  $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{n=-\infty}^\infty (n+z)^{-s} = \frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)} \sum_{n+\alpha>0} n^{s-1} e^{2\pi i n z}.$$

13. Можно разбить сумму  $G(z, s)$  следующим образом:

$$\begin{aligned}G(z, s) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^\infty n^{-s} + \sum_{m<0} \sum_{n=-\infty}^\infty (mz+n)^{-s} + \sum_{m>0} \sum_{n=-\infty}^\infty (mz+n)^{-s} = \\ &= (1 + e^{\pi is}) \zeta(s) + S_2 + S_3,\end{aligned}$$

где согласно задаче 12

$$S_2 = e^{\pi is} (-2\pi i)^s A(z, s)/\Gamma(s), \quad S_3 = (-2\pi i)^s A(z, s)/\Gamma(s).$$

14. Результат задачи 13 можно переписать как

$$G(z, s) = (1 + e^{\pi is}) \zeta(s) + (1 + e^{\pi is}) (-2\pi i)^s A(z, s)/\Gamma(s),$$

что дает аналитическое продолжение  $G(z, s)$  на всю комплексную  $s$ -плоскость.

15. Исходя из задачи 14 и определения  $H(z, s)$ , можно переписать задачу 11 в терминах  $H(z, s)$ :

$$(cz + d)^{-s} H(Vz, s) = H(z, s) - \frac{e^{\pi i s} \Gamma(s) (1 + e^{\pi i s}) \zeta(s)}{(2\pi i)^s (cz + d)^s} + \\ + \frac{\Gamma(s) (1 + e^{\pi i s}) \zeta(s)}{(2\pi i)^s} + \frac{L(z, s)}{(2\pi i)^s}.$$

16. Вычисление вычетов можно использовать, чтобы показать, что

$$L(z, 0) = 2\pi i \left( \frac{-1}{12c(cz + d)} - \frac{cz + d}{12c} + s(d, c) - \frac{1}{4} \right),$$

где  $s(d, c)$  из (5.2.6).

17. Полагая  $s = 0$  в задаче 15 и применяя задачу 16, можно показать, что имеет место равенство

$$\log \eta(Vz) = \log \eta(z) - \frac{\pi i}{4} + \frac{1}{2} \log(cz + d) - \pi i s(d, c) + \frac{\pi i(a + d)}{12c};$$

этот результат эквивалентен равенству (5.2.2).

### З а м е ч а н и я

Первоисточником этой главе служит эпохальная работа Харди и Рамануджана (1918). В своем изложении мы следовали работе [30], хотя Радемахер впоследствии (см. [31, 33]) и совершенствовал этот круговой метод. Несмотря на то, что его позднейшие подходы элегантны и полезны в теории модулярных функций, мы выбрали именно его изначальный подход как легко применимый к задачам о немодулярных производящих функциях (см. гл. 6). В книгах [3, 18, 24, 26, 33] превосходно излагается роль модулярных функций в теории разбиений. Ряд важных асимптотических результатов о разбиениях, относящихся к гл. 5 и 6, см. в [8, 9]. Недавние работы по разработкам метода Харди—Рамануджана—Радемахера указаны в [28, разделы P68, P72].

Задачи 1, 2 — [6, 29, 2]; задача 3 — [10—17] — многие случаи простого  $k$ ; [34] — случай произвольного  $k$  (см. также [21—23]); задача 4 — [35, 7, 1]; задача 5 — [35].

Доказательство (5.2.2), представленное в задачах 6—17, принадлежит Берндту (частное сообщение) и представлено во много большей общности в [4, 5]. Метод Берндта, применимый к ряду модулярных функций, и концептуально, и вычислительно проще иных методов; по-видимому, он должен найти широкое распространение в теории разбиений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Andrews G. E. (1966). On the theorems of Watson and Dragonette for Ramanujan's mock theta functions. — Amer. J. Math. 88, p. 454—490.
2. Atkin J. (1970). Researches on partitions. — Duke Math. J. 38, p. 403—409.
3. Ayoub R. (1963). An Introduction to the Analytic Theory of Numbers. — American Mathematical Soc., Providence.
4. Berndt B. (1973). Generalized Dedekind eta-functions and generalized Dedekind sums. — Trans. Amer. Math. Soc. 178, p. 495—508.
5. Berndt B. (1975). Generalized Eisenstein series and modified Dedekind sums. — J. Reine Angew. Math. 272, p. 182—193.
6. Cayley A. (1898). Researches in the partition of numbers. — Collected Math. Papers 2, p. 235—249, p. 506—512.
7. Dragonette L. A. (1952). Some asymptotic formulae for the mock theta series of Ramanujan. — Trans. Amer. Math. Soc. 72, p. 474—500.

8. Grosswald E. (1958). Some theorems concerning partitions. — Trans. Amer. Math. Soc. **89**, p. 113—128.
9. Grosswald E. (1960). Partitions into prime powers. — Michigan Math. J., **7**, p. 97—122.
10. H a g i s P. (1962). A problem on partitions with a prime modulus  $p \geq 3$ . — Trans. Amer. Math. Soc. **102**, p. 30—62.
11. H a g i s P. (1963). Partitions into odd summands. — Amer. J. Math. **85**, p. 213—222.
12. H a g i s P. (1964a). On a class of partitions with distinct summands. — Trans. Amer. Math. Soc. **112**, p. 401—415.
13. H a g i s P. (1964b). Partitions into odd and unequal parts. — Amer. J. Math. **86**, p. 317—324.
14. H a g i s P. (1965a). A correction of some theorems on partitions. — Trans. Amer. Math. Soc. **118**, p. 550.
15. H a g i s P. (1965b). Partitions with odd summands—some comments and corrections. — Amer. J. Math. **87**, p. 218—220.
16. H a g i s P. (1965c). On the partitions of an integer into distinct odd summands. — Amer. J. Math. **87**, p. 867—873.
17. H a g i s P. (1966). Some theorems concerning partitions into odd summands. — Amer. J. Math. **88**, p. 664—681.
18. Hardy G. H. (1940). Ramanujan.—Cambridge Univ. Press, London and New York (reprinted by Chelsea, New York).
19. Hardy G. H., Ramanujan S. (1918). Asymptotic formulae in combinatory analysis. — Proc. London Math. Soc. (2), **17**, p. 75—115. (Also, Collected Papers of S. Ramanujan, pp. 276—309. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1927, reprinted by Chelsea, New York, 1962).
20. Hua L. K. (1942). On the number of partitions of a number into unequal parts. — Trans. Amer. Math. Soc. **51**, p. 194—201.
21. Iseki S. (1959). A partition function with some congruence condition. — Amer. J. Math. **81**, p. 939—961.
22. Iseki S. (1960). On some partition functions. — J. Math. Soc. Japan **12**, p. 81—88.
23. Iseki S. (1961). Partitions in certain arithmetic progressions. Amer. — J. Math. **83**, p. 243—264.
24. Knopp M. I. (1970). Modular Functions in Analytic Number Theory. — Markham, Chicago.
25. Lehmer D. H. (1939). On the remainders and convergence of the series for the partition function. — Trans. Amer. Math. Soc. **46**, p. 362—373.
26. Lehner J. (1964). Discontinuous Groups and Automorphic Functions. — Mathematical Surveys, No VIII, Amer. Math. Soc., Providence.
27. LeVeque W. J. (1956). Topics in Number Theory, Vol. 2. — Addison-Wesley, Reading, Mass.
28. LeVeque W. J. (1974). Reviews in Number Theory, Vol. 4. — Amer. Math. Soc., Providence, R. I.
29. MacMahon P. A. (1916). Combinatory Analysis, vol. 2. — Cambridge Univ. Press, London and New York (reprinted by Chelsea, New York, 1960).
30. Rademacher H. (1937). On the partition function  $p(n)$ . — Proc. London Math. Soc. (2) **43**, p. 241—254.
31. Rademacher H. (1943). On the expansion of the partition function in a series. — Ann. of Math. **44**, p. 416—422.
32. Rademacher H. (1958). On the Selberg formula for  $A_k(n)$ . — J. Indian Math. Soc. (N. S.) **21**, p. 41—55.
33. Rademacher H. (1973). Topics in Analytic Number Theory—Springer, Berlin.
34. Subramanyassatri V. V. (1972). Partitions with congruence conditions. — J. Indian Math. Soc. **36**, 177—194.

35. Watson G. N. (1936). The final problem: an account of the mock-theta functions. — J. London Math. Soc. **11**, p. 55—80.
36. Whiteman A. L. (1947). A sum connected with the partition function. — Bull. Amer. Math. Soc. **53**, p. 598—603.
37. Whiteman A. L. (1956). A sum connected with the series for the partition function. — Pacific J. Math. **6**, p. 159—176.
- 38.\* Serre J.-P. (1970). Cours d'arithmétique. — Presses Univ. de France, Paris. (Русский перевод: Серр Ж.-П. Курс арифметики. — М.: Мир, 1972.)
- 39.\* Чандрасекхаран К. Арифметические функции. — М.: Наука, 1975.
- 40.\* Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1971.
- 41.\* Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1977.
- 42.\* Успенский Я. В. Асимптотические выражения числовых функций, встречающиеся в задаче о разбиении чисел на слагаемые. — Изв. Российской АН, 1920, **14**, с. 199—218.
- 43.\* Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1977.

## АСИМПТОТИКА БЕСКОНЕЧНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

### 6.1. Введение

Как видно из гл. 1, многие функции разбиений своими производящими функциями имеют бесконечные произведения. Многие исследователи рассматривали асимптотику таких функций разбиений. Здесь излагается весьма общая теорема Мейнардуса, дающая асимптотическую формулу для целого ряда функций разбиений. Метод этой теоремы поддается обобщению и в конце главы обсуждаются некоторые из возможных обобщений.

Будем рассматривать бесконечные произведения

$$f(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-a_n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n) q^n, \quad (6.1.1)$$

где  $q = e^{-\tau}$  и  $\operatorname{Re} \tau > 0$  (или, эквивалентно,  $|q| < 1$ ). Ограничимся случаем неотрицательных действительных  $a_n$ .

Будем также рассматривать ряд Дирихле

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (6.1.2)$$

который предполагается сходящимся при  $\sigma > \alpha$ , где  $\alpha$  — положительное действительное число. Кроме того, предполагается, что  $D(s)$  допускает аналитическое продолжение в области  $\sigma \geq -C_0$  ( $0 < C_0 < 1$ ) и в этой области  $D(s)$  аналитична, за исключением полюса порядка 1 при  $s = \alpha$  с вычетом  $A$ . Наконец, предполагается, что

$$D(s) = O(|t|^{C_1}) \quad (6.1.3)$$

равномерно в области  $\sigma \geq -C_0$  при  $|t| \rightarrow \infty$ , где  $C_1$  — фиксированное положительное действительное число.

Нам также придется использовать функцию

$$g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n, \quad q = e^{-\tau}. \quad (6.1.4)$$

Если  $\tau = y + 2\pi i x$  (где  $x$  и  $y$  — действительные), то предполагаем, что для  $|\arg \tau| > \pi/4$ ,  $|x| \leq 1/2$ , выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(g(\tau)) - g(y) \leq -C_2 y^{-\varepsilon} \quad (6.1.5)$$

для достаточно малых  $y$ , где  $\varepsilon$  — произвольное фиксированное положительное число, а  $C_2$  — подходящим образом выбираемое положительное число, зависящее от  $\varepsilon$ .

С учетом этих определений сформулируем основную теорему.

**Т е о р е м а 6.2.** При  $n \rightarrow \infty$

$$r(n) = Cn^k \exp \{ n^{\alpha/(\alpha+1)} (1 + 1/\alpha) [A\Gamma(\alpha + 1)\zeta(\alpha + 1)]^{1/(\alpha+1)} \} \times \\ \times (1 + O(n^{-k_1})), \quad (6.1.6)$$

где  $\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}$  — дзета-функция Римана,

$$C = e^{D'(0)} [2\pi(1 + \alpha)]^{-1/2} [A\Gamma(\alpha + 1)\zeta(\alpha + 1)]^{(1-2D(0))/(2+2\alpha)}, \quad (6.1.7)$$

$$k = \frac{D(0) - 1 - \alpha/2}{1 + \alpha}, \quad (6.1.8)$$

$$k_1 = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \min \left( \frac{C_0}{\alpha} - \frac{\delta}{4}, \frac{1}{2} - \delta \right), \quad (6.1.9)$$

$\delta$  — произвольное положительное число.

Доказательство этой теоремы основано на применении метода перевала. В задачах, в конце этой главы, представлен ряд приложений теоремы 6.2.

## 6.2. Доказательство теоремы 6.2

При применении метода перевала нам понадобится информация о поведении  $f(\tau)$  в полуплоскости  $\operatorname{Re}(\tau) > 0$  и особенно около  $\tau = 0$ ; требуемой информацией снабжает нас следующая

**Л е м м а 6.1.** Если функции  $f(\tau)$ ,  $D(s)$ ,  $g(\tau)$ ,  $\tau = y + 2\pi ix$  удовлетворяют требованиям § 6.1, то

$$f(\tau) = \exp \{ A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha + 1)\tau^{-\alpha} - D(0)\log \tau + D'(0) + O(y^{C_0}) \} \quad (6.2.1)$$

равномерно по  $x$  при  $y \rightarrow 0$ ,  $|\arg \tau| \leq \pi/4$ ,  $|x| \leq 1/2$ ; существует такое положительное  $\varepsilon_1$ , что

$$f(y + 2\pi ix) = O(\exp \{ A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha + 1)y^{-\alpha} - C_3y^{-\varepsilon_1} \}) \quad (6.2.2)$$

равномерно по  $x$  при  $y^\beta \leq |x| \leq 1/2$ ,  $y \rightarrow 0$ , где

$$\beta = 1 + \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right), \quad 0 < \delta < \frac{2}{3}, \quad (6.2.3)$$

а  $C_3$  — фиксированное действительное число.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Заметим, что

$$\log f(\tau) = - \sum_{v=1}^{\infty} a_v \log(1 - e^{-v\tau}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{-vk\tau}. \quad (6.2.4)$$

Напомним теперь, что  $e^{-\tau}$  является результатом преобразования Меллина функции  $\Gamma(s)$ , т. е.

$$e^{-\tau} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \tau^{-s} \Gamma(s) ds, \quad \operatorname{Re} \tau > 0, \quad \sigma_0 > 0. \quad (6.2.5)$$

Применяя (6.2.5) к показательной функции в (6.2.4), видим, что

$$\log f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\alpha-i\infty}^{1+\alpha+i\infty} \tau^{-s} \Gamma(s) \zeta(s+1) D(s) ds; \quad (6.2.6)$$

перемена суммирования и интегрирования, необходимая для получения (6.2.6), обеспечивается абсолютной сходимостью.

Наша цель теперь состоит в переносе прямой интегрирования с прямой  $\operatorname{Re} \tau = 1 + \alpha$  на прямую  $\operatorname{Re} \tau = -C_0$ . Прежде всего отметим, что подынтегральное выражение в (6.2.6) имеет полюс первого порядка при  $s = \alpha$  и полюс второго порядка при  $s = 0$ ; вычет при  $s = \alpha$  есть, очевидно,  $\tau^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha+1) A$ . В окрестности  $s = 0$

$$\begin{aligned} \tau^{-s} \Gamma(s) \zeta(s+1) D(s) &= (1 - s \log \tau + \dots) \left( \frac{1}{s} - \gamma + \dots \right) \times \\ &\times \left( \frac{1}{s} + \gamma + \dots \right) (D(0) + D'(0)s + \dots) = \\ &= \frac{1}{s^2} + (D'(0) - D(0) \log \tau) \frac{1}{s} + \dots; \end{aligned}$$

поэтому вычет подынтегрального выражения в (6.2.6) при  $s = 0$  равен  $D'(0) - D(0) \log \tau$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \log f(\tau) &= A \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha+1) \tau^{-\alpha} - D(0) \log \tau + \\ &+ D'(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_0 - i\infty}^{-C_0 + i\infty} \tau^{-s} \Gamma(s) \zeta(s+1) D(s) ds; \quad (6.2.7) \end{aligned}$$

перенос прямой интегрирования, осуществленный в переходе от (6.2.6) к (6.2.7), допустим, поскольку для  $|\arg \tau| \leq \pi/4$  видим, что

$$|\tau^{-\sigma}| = |\tau|^{-\sigma} \exp \{t \arg \tau\} \leq |t|^{-\sigma} \exp \{\pi |t|/4\},$$

а для  $\sigma \geq C_0$

$$D(s) = O(|t|^{C_1})$$

(по предположению), тогда как классические результаты о  $\zeta$  и  $\Gamma$  утверждают, что

$$\zeta(s+1) = O(|t|^{C_2}),$$

$$\Gamma(s) = O\left(\exp\left\{-\frac{\pi}{2}|t|\right\} |t|^{C_3}\right)$$

при  $t \rightarrow \infty$ .

Наконец, заметим, что

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_0-i\infty}^{-C_0+i\infty} \tau^{-s} \Gamma(s) \zeta(s+1) D(s) ds \right| = \\ & = O\left( |\tau|^{C_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\pi}{4}|t|\right\} |t|^{C_1+C_4+C_5} dt \right) = O(|\tau|^{C_0}) = O(y^{C_0}) \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

(поскольку  $|\arg \tau| \leq \pi/4$  влечет, что  $|2\pi x| \leq y$  и, таким образом,  $|\tau| \leq \sqrt{2}y$ ). Равенство (6.2.1) теперь следует из (6.2.7) с учетом (6.2.8).

Перейдем теперь к равенству (6.2.2); здесь рассмотрим два случая: 1)  $y^\beta \leq |x| \leq y/(2\pi)$  и 2)  $y/(2\pi) \leq |x| \leq 1/2$ . Один или оба из этих случаев могут быть пусты в зависимости от  $y$ , но, поскольку мы интересуемся лишь окрестностью нуля, мы можем всегда положить  $y$  достаточно малым, чтобы оба случая были непусты.

В случае 1 видим, что

$$\operatorname{tg} |\arg \tau| = \frac{2\pi |x|}{y} \leq 1, \quad \text{или} \quad |\arg \tau| \leq \frac{\pi}{4},$$

как и предполагалось ранее. Поэтому можно оценить (6.2.7) тем же способом и показать, что

$$|\log f(y + 2\pi i x)| \leq A\Gamma(\alpha) \zeta(\alpha + 1) |\tau|^{-\alpha} + C_6 |\log y|. \quad (6.2.9)$$

Все дополнительные члены, которые можно ожидать в правой части (6.2.9), оцениваются сверху величиной  $C_6 |\log y|$ , поскольку члены эти имеют меньший порядок (вспомним, что  $y$  близко к 0 и поэтому  $|\log y|$  мажорирует любую неотрицательную степень  $y$ ).

Вспоминая, что  $|\tau|^2 = y^2 + 4\pi^2 x^2$ , из (6.2.9) видим, что

$$\begin{aligned} \log |f(y + 2\pi i x)| & \leq A\Gamma(\alpha) \zeta(\alpha + 1) y^{-\alpha} + \\ & + A\Gamma(\alpha) \zeta(\alpha + 1) y^{-\alpha} [(1 + 4\pi^2 x^2 y^{-2})^{-\alpha/2} - 1] + C_6 |\log y| \leq \\ & \leq A\Gamma(\alpha) \zeta(\alpha + 1) y^{-\alpha} - C_7 y^{-\alpha} |x|^2 y^{-2} \leq \\ & \leq A\Gamma(\alpha) \zeta(\alpha + 1) y^{-\alpha} - C_7 y^{-\alpha+2(\beta-1)}. \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Переход к последнему неравенству следует из того замечания, что при  $Y \rightarrow 0^+$   $(1 + AY)^{-\alpha/2} - 1 \sim -\alpha AY/2$ , а  $|\log y|$  мажорируется любой отрицательной степенью  $y$  при  $y$ , близком к 0.

Теперь согласно (6.2.3) видим, что  $-\alpha + 2(\beta - 1) = -\alpha\delta/2 \leq -\varepsilon_1$ . Поэтому в случае 1

$$\log |f(y + 2\pi i x)| \leq A\Gamma(\alpha) \zeta(\alpha + 1) y^{-\alpha} - C_3 y^{-\varepsilon_1}, \quad (6.2.11)$$

что эквивалентно (6.2.2).



В случае 2 (т. е.  $y/(2\pi) \leq |x| \leq 1/2$ ) из (6.1.4) и (6.2.4) видим, что

$$\begin{aligned} \log |f(y + 2\pi ix)| - \operatorname{Re}(g(\tau)) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{-vky} \cos(2\pi kvx) \leq \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{-vky} = \log f(y) - g(y), \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

поскольку все  $a_v$  неотрицательны. Теперь мы имеем исполнение условий, необходимых для применения (6.1.5). Поэтому в случае 2

$$\begin{aligned} \log |f(y + 2\pi ix)| &\leq \log f(y) + \operatorname{Re}(g(\tau)) - g(y) \leq \\ &\leq A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)y^{-\alpha} - C_8 y^{-\varepsilon} \leq A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)y^{-\alpha} - C_3 y^{-\varepsilon_1}. \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Тем самым наша лемма полностью доказана.

Теперь мы подготовлены к выводу асимптотической формулы для  $r(n)$ .

**Доказательство теоремы 6.2.** Напомним, что из интегральной теоремы Коши следует формула

$$r(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_0}^{\tau_0 + 2\pi i} f(\tau) e^{n\tau} d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} f(y + 2\pi ix) e^{ny + 2\pi i n x} dx. \quad (6.2.14)$$

Мы хотим применить метод перевала для оценки этого интеграла. Поскольку максимум абсолютной величины подынтегрального выражения достигается при  $x = 0$  и поскольку при  $x = 0$  из леммы 6.1 следует, что это подынтегральное выражение хорошо аппроксимируется функцией

$$\exp \{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)y^{-\alpha} + ny\},$$

то метод перевала требует минимизировать это выражение, т. е. мы должны потребовать, чтобы  $y$  было выбрано так, чтобы

$$\frac{d}{dy} \exp \{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)y^{-\alpha} + ny\} = 0.$$

Поэтому полагаем

$$y = n^{-1/(\alpha+1)} (\alpha A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1))^{1/(\alpha+1)}. \quad (6.2.15)$$

Для упрощения обозначений положим

$$m = ny = n^{\alpha/(\alpha+1)} (\alpha A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1))^{1/(\alpha+1)}. \quad (6.2.16)$$

Из (6.2.14) видим, что

$$r(n) = e^m \int_{-y^\beta}^{y^\beta} f(y + 2\pi ix) e^{2\pi i n x} dx + e^m R_1, \quad (6.2.17)$$

где

$$R_1 = \int_{-1/2}^{-y\beta} f(y + 2\pi ix) e^{2\pi i n x} dx + \int_{y\beta}^{1/2} f(y + 2\pi ix) e^{2\pi i n x} dx \quad (6.2.18)$$

и  $\beta$  из (6.2.3). Интервал интегрирования разбивается на две части так же, как рассечение Харди — Рамануджана — Фарея применялось к производящим функций разбиений в гл. 5. Для понимания появления условия (6.2.3) заметим, что мы уже им явно пользовались в доказательстве леммы 6.1 для того, чтобы  $-\alpha + 2(\beta - 1)$  было малым отрицательным числом.

По лемме 6.1

$$R_1 = O\left(\exp\left\{\left(\frac{m}{n}\right)^{-\alpha} \text{AG}(\alpha) \zeta(\alpha + 1) - C_3\left(\frac{m}{n}\right)^{-e_1}\right\}\right) \quad (6.2.19)$$

при  $n \rightarrow \infty$  (т. е.  $y = m/n \rightarrow 0$ ). Поэтому

$$\exp\{m\} R_1 = O\left(\exp\left\{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)m - C_9 m^{e_2}\right\}\right) \quad (6.2.20)$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Соотношение (6.2.20) обеспечивает нужную оценку второго члена в (6.2.17). Мы должны теперь подсчитать основной интеграл. Выберем  $n \geq n_2 \geq n_1$ , где  $n_2$  достаточно велико, так что  $2\pi(m/n)^{\beta-1} \leq 1$  (это вполне допустимо, поскольку  $\beta > 1$  и  $m/n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ). Теперь по лемме 6.1

$$r(n) = \exp\left\{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)m + D'(0)\right\} \int_{-(m/n)\beta}^{(m/n)\beta} \exp\{\varphi_1(x)\} dx + \exp\{m\} R_1, \quad (6.2.21)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = & \frac{m}{\alpha} \left[ \left(1 + \frac{2\pi i x n}{m}\right)^{-\alpha} - 1 \right] + \\ & + 2\pi i n x - D(0) \log\left(\frac{m}{n} + 2\pi i x\right) + O(m^{-c_0/2}). \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

Отметим, что выбор  $n_1$  гарантирует, что на всем интервале интегрирования  $|x| \leq 1/2$ , а выбор  $n_2$  — что  $\arg \tau \leq \pi/4$ .

Сделав замену  $2\pi x = (m/n)\omega$ , получаем

$$\begin{aligned} r(n) = \exp\left\{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)m - (D(0) - 1) \log \frac{m}{n} + D'(0) - \log 2\pi\right\} \cdot I + \\ + \exp\{m\} R_1, \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

где

$$I = \int_{-C_{10}m^{(1-\beta)/\alpha}}^{C_{10}m^{(1-\beta)/\alpha}} \exp\{\varphi_2(\omega)\} d\omega \quad (6.2.24)$$

и

$$\varphi_2(\omega) = m \left( \frac{1}{\alpha(1+i\omega)^\alpha} - \frac{1}{\alpha} + i\omega \right) - D(0) \log(1+i\omega) + O(m^{-C_0/\alpha}) \quad (6.2.25)$$

при  $m \rightarrow \infty$ .

Наша задача теперь свелась к получению асимптотического выражения для  $I$ . Во-первых,

$$I = \int_{-C_{10}m^{(1-\beta)/\alpha}}^{C_{10}m^{(1-\beta)/\alpha}} \exp \left\{ -\frac{m(\alpha+1)}{2} \omega^2 \right\} d\omega + R_2, \quad (6.2.26)$$

где

$$R_2 = \int_{-C_{10}m^{(1-\beta)/\alpha}}^{C_{10}m^{(1-\beta)/\alpha}} \exp \left\{ -m \frac{\alpha+1}{2} \omega^2 \right\} (\exp \{ \varphi_3(\omega) \} - 1) d\omega, \quad (6.2.27)$$

$$\varphi_3(\omega) = m \left( \frac{1}{\alpha(1+i\omega)^\alpha} - \frac{1}{\alpha} + i\omega + \frac{\alpha+1}{2} \omega^2 \right) - D(0) \log(1+i\omega) + O(m^{-C_0/\alpha}) \quad (6.2.28)$$

при  $m \rightarrow \infty$ . Для  $n \geq n_3 \geq n_2$  выберем  $n_3$  достаточно большим, чтобы неравенство  $|\omega| < 1$  выполнялось на всем интервале интегрирования. Следовательно,

$$\begin{aligned} m \left( \frac{1}{\alpha(1+i\omega)^\alpha} - \frac{1}{\alpha} + i\omega + \frac{\alpha+1}{2} \omega^2 \right) &= \\ &= m \left[ \frac{1}{\alpha} \sum_{j \geq 0} \binom{\alpha+j-1}{j} (-1)^j i^j \omega^j - \frac{1}{\alpha} + i\omega + \frac{\alpha+1}{2} \omega^2 \right] = \\ &= \frac{m}{\alpha} \sum_{j \geq 3} \binom{\alpha+j-1}{j} (-1)^j i^j \omega^j = O(m|\omega|^3) = O(m^{(\alpha+3(1-\beta))/\alpha}), \end{aligned} \quad (6.2.29)$$

в то время как

$$\log(1+i\omega) = - \sum_{j \geq 1} \frac{(-1)^j i^j \omega^j}{j} = O(|\omega|) = O(m^{(1-\beta)/\alpha}). \quad (6.2.30)$$

Стало быть, при  $m \rightarrow \infty$ 

$$\begin{aligned} \exp \{ \varphi_3(\omega) \} - 1 &= O(|\varphi_3(\omega)|) = \\ &= O(m^{[\alpha+3(1-\beta)]/\alpha} + m^{(1-\beta)/\alpha} + m^{-C_0/\alpha}) = O(m^{-\mu_1}), \end{aligned} \quad (6.2.31)$$

где в силу (6.2.3)

$$\mu_1 = \min \left( \frac{C_0}{\alpha}, \frac{1}{2} - \frac{3\delta}{4} \right). \quad (6.2.32)$$

Поскольку длина интервала интегрирования в (6.2.27) есть  $O(m^{(1-\beta)/\alpha})$ , видим, что при  $m \rightarrow \infty$

$$R_2 = O(m^{-\mu_2}), \quad (6.2.33)$$

где

$$\mu_2 = \min \left( \frac{C_0}{\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{\delta}{4}, 1 - \delta \right). \quad (6.2.34)$$

Итак, для интеграла (6.2.26) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-C_{10}m^{(1-\beta)/\alpha}}^{C_{10}m^{(1-\beta)/\alpha}} \exp \left\{ -\frac{m(\alpha+1)}{2} \omega^2 \right\} d\omega = \\ & = \left( \frac{1}{2} m(\alpha+1) \right)^{-1/2} \int_{-C_{11}m^{\delta/4}}^{C_{11}m^{\delta/4}} \exp \{ -z^2 \} dz = \\ & = \left( \frac{2\pi}{m(\alpha+1)} \right)^{1/2} + O(m^{-1/2} \exp \{ -C_{12}m^{\delta/4} \}). \end{aligned} \quad (6.2.35)$$

Поэтому, из (6.2.26), (6.2.33) и (6.2.36) следует, что при  $m \rightarrow \infty$

$$I = \left( \frac{2\pi}{m(\alpha+1)} \right)^{1/2} (1 + O(m^{-\mu_2})), \quad (6.2.36)$$

где

$$\mu_3 = \min \left( \frac{C_0}{\alpha} - \frac{\delta}{4}, \frac{1}{2} - \delta \right). \quad (6.2.37)$$

Наконец, согласно (6.2.17), (6.2.20), (6.2.33) и (6.2.36) видим, что при  $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} r(n) = \exp \left\{ \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) m - (D(0) - 1) \log \frac{m}{n} + D'(0) \right\} \times \\ \times (2\pi m(\alpha+1))^{-1/2} (1 + O(m^{-\mu_3})). \end{aligned} \quad (6.2.38)$$

Используя (6.2.16) для замены  $m$  функцией от  $n$ , получаем в точности (6.1.16). Тем самым теорема 6.2 доказана.

### 6.3. Приложения теоремы 6.2

Теорема 6.2 применима к целому ряду функций разбиений, рассматриваемых в гл. 1 и 2; она также доставляет асимптотические формулы и для функций плоских разбиений (см. задачу 6 гл. 11).

**Т е о р е м а 6.3** (см. (5.1.2)).

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp \left\{ \pi \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} n^{1/2} \right\}.$$

**Доказательство.** В теореме 6.2 положим  $a_n = 1$  для всех  $n$ ; тогда

$$r(n) = p(n), \quad D(s) = \zeta(s)$$

$$\left( \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi, \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad g(\tau) = (1 - e^{-\tau})^{-1} \right).$$

Довольно легко проверить выполнимость условий (6.1.3)—(6.1.5) и, подставив соответствующие значения в теорему 6.2, получим требуемое.

**Теорема 6.4.** Пусть  $H_{k,a}$  — множество всех положительных целых, сравнимых с  $a$  по модулю  $k$ . Тогда для  $1 \leq a \leq k$

$$p(\langle H_{k,a} \rangle, n) \sim C n^{k'} \exp \left\{ \pi \left( \frac{2n}{3k} \right)^{1/2} \right\},$$

где

$$C = \Gamma\left(\frac{a}{k}\right) \pi^{(a/k)-1} 2^{-(3/2)-(a/(2k))} 3^{-(a/(2k))} k^{-1/2+(a/(2k))},$$

$$k' = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a}{k} \right).$$

Этот результат получается в точности тем же способом, что и теорема 6.3. Здесь  $D(s) = k^{-s} \zeta(s, a/k)$ , где

$$\zeta(s, h) = \sum_{n \geq 0} (n+h)^{-s}$$

— дзета-функция Гурвица и  $g(s) = e^{-a\tau} (1 - e^{-k\tau})^{-1}$ .

### Задачи

1. Пусть  $H_{k, \pm a}$  обозначает множество положительных целых, сравнимых с  $a$  или  $-a$  по модулю  $k$ . Тогда для простого  $k$  и  $1 \leq a < k/2$

$$p(\langle H_{k, \pm a} \rangle, n) \sim \frac{\operatorname{cosec}(\pi a/k)}{4\pi 3^{1/4} k^{1/4}} n^{-3/4} \exp \left\{ 2\pi \left( \frac{n}{3k} \right)^{1/2} \right\}.$$

2. При вычислении  $r(n)$  из теоремы 6.2 использовалась логарифмическая производная:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r(n) q^n \left( \sum_{n=0}^{\infty} r(n) q^n \right)^{-1} = q \frac{d}{dq} \log \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-a_n} = \sum_{N=1}^{\infty} \left( \sum_{d|N} da_d \right) q^N.$$

Показать, что отсюда следует равенство

$$n r(n) = \sum_{j=1}^n r(n-j) D_j,$$

где  $D_j = \sum_{d|j} da_d$ .

3. Показать, что условие  $\sum_{1 \leq n \leq t} a_n = \frac{A t^\alpha}{\alpha} + O(t^{\alpha-\varepsilon})$  влечет непрерывность  $D(s)$  для  $\operatorname{Re} s > \alpha - \varepsilon$  с полюсом первого порядка вычета  $A$  при  $s = \alpha$ .

4. Если  $\sum_{1 \leq n \leq t} a_n \leq \frac{At^\alpha}{\alpha}$  для всех  $t \geq 0$ , то для  $\lambda > 0$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m a_m e^{-\lambda m} \leq \frac{\lambda A}{\alpha} \int_0^{\infty} t^{\alpha+1} e^{-\lambda t} dt = \frac{A}{\alpha} \lambda^{-\alpha-1} \Gamma(\alpha+1).$$

5. Если  $a_n$  неотрицательно и  $\sum_{1 \leq n \leq t} a_n \leq At^\alpha$  для всех  $t \geq 0$ , то можно доказать, что

$$r(n) < \exp \left\{ n^{\alpha/(\alpha+1)} \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) (A \Gamma(\alpha+1) \zeta(\alpha+1))^{1/(\alpha+1)} \right\} = \exp \{ c n^{\alpha/(\alpha+1)} \}.$$

Для этого использовать тот факт (см. задачу 2), что

$$nr(n) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{v=1 \\ kv < n}}^n a_v v r(n - kv);$$

требуемое нам неравенство тривиально при  $n = 1$ , и можно использовать рекуррентность для его доказательства по индукции. Опишем вкратце эту процедуру:

$$\begin{aligned} nr(n) &< \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{v=1 \\ kv < n}}^n a_v v \exp \{ c(n - kv)^{\alpha/(\alpha+1)} \} < \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} a_v v \exp \left\{ c n^{\alpha/(\alpha+1)} - \frac{c \alpha k v}{(\alpha+1)} n^{-1/(\alpha+1)} \right\} \leq \\ &\leq \exp \{ c n^{\alpha/(\alpha+1)} \} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \int_0^{\infty} A t^{\alpha+1} \exp(-\lambda t) dt = \\ &= (\text{задача 4 при } \lambda = c \alpha k n^{-(\alpha+1)^{-1}} (\alpha+1)^{-1}) = \\ &= \exp \{ c n^{\alpha/(\alpha+1)} \} A \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-\alpha-1} \Gamma(\alpha+1) = \\ &= \exp \{ c n^{\alpha/(\alpha+1)} \} A \Gamma(\alpha+1) c^{-\alpha-1} n^{\alpha+1} \zeta(\alpha+1) = \\ &= n \exp \{ c n^{\alpha/(\alpha+1)} \} c^{-\alpha-1} [A \alpha^{-\alpha-1} (\alpha+1)^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1) \zeta(\alpha+1)] = \\ &= n \exp \{ c n^{\alpha/(\alpha+1)} \} \left( \text{так как } c = \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) (A \Gamma(\alpha+1) \zeta(\alpha+1))^{1/(\alpha+1)} \right). \end{aligned}$$

Следующие задачи знакомят с некоторыми из весьма непростых исследований Мейнардуса о разбиениях с разностью  $d$  между частями.

6. Если  $\Delta_d(n)$  обозначает число разбиений  $n$  с разностью между частями по крайней мере  $d$ , то

$$F_d(q) = \sum_{n \geq 0} \Delta_d(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{dn(n-1)/2+n}}{(q)_n}.$$

7\*. Используя (2.2.5) и (2.2.10), доказать, что

$$F_d(q) = \operatorname{Res}_{\omega=0} \left\{ \frac{1}{\omega} (\omega q)_{\infty}^{-1} (q^d; q^d)_{\infty} (-\omega^{-1}; q^d)_{\infty} (-\omega q^d; q^d)_{\infty} \right\}.$$

8\*. Формула из задачи 7 для  $F_d(q)$  дает информацию о поведении  $F_d(q)$  при  $|q|$ , близком к 1. Используя круговой метод, доказать, что

$$\Delta_d(n) \sim C_d n^{-3/4} \exp \{2 (A_d n)^{1/2}\},$$

где

$$C_d = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} A_d^{1/4} [(\alpha_d)^{d-1} (d(\alpha_d)^{d-1} + 1)]^{-1/2},$$

$$A_d = \frac{d}{2} \log^2 \alpha_d + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\alpha_d)^{rd}}{r^2},$$

где  $\alpha_d$  — положительный действительный корень уравнения  $x^d + x - 1 = 0$ .

9. Доказать, что  $A_2 = \pi^2/15$  (ср. с задачей 1 при  $a = 1$ ,  $k = 5$ ; следствие 8.6 также можно использовать для получения того, что  $\Delta_2(n) = r(n)$ ).

10\*. Если  $H$  есть объединение конечного числа арифметических прогрессий вида  $\{a_i + nM\}_{n=0}^{\infty}$  ( $1 \leq i \leq r$ ,  $1 \leq a_i \leq M$ ), то  $p(\langle H \rangle (\leq 1), n)$  — число разбиений  $n$  на различные части из  $H$  — является монотонно возрастающей функцией для достаточно большого  $n$  тогда и только тогда, когда  $\operatorname{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_r, M) = 1$ .

11\*. Функция разбиений  $p(\langle H \rangle (\leq 1), n)$ , введенная в задаче 10, удовлетворяет следующему асимптотическому соотношению:

$$p(\langle H \rangle (\leq 1), n) = 2^{(r-3)/2 - (a_1 + a_2 + \dots + a_r)/M} 3^{-1/4} n^{-3/4} e^{\pi \sqrt{rn/(3M)}} \times \\ \times (1 + O(n^{-1/2+\delta}))$$

при условии, что  $\operatorname{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_r, M) = 1$ .

12\*. Число  $p_{n,k} (= p(n, k, n) - p(n, k-1, n))$  разбиений  $n$  равно на  $k$  частей унимодально по  $k$ , если  $n$  достаточно велико (т. е. существует  $k_1 = k_1(n)$  такое, что  $p_{n,k} > p_{n,k+1}$  для  $k > k_1$  и  $p_{n,k} < p_{n,k+1}$  для  $k < k_1$ ).

13\*. Почти все разбиения  $\pi_0$  числа  $n$  (т. е. за исключением  $o(p(n))$ ) имеют  $\#(\pi_0)$  слагаемых, где

$$\left| \#(\pi_0) - \frac{\sqrt{6n}}{2\pi} \log n \right| < \sqrt{n} w(n),$$

где  $w(n)$  — неубывающая функция, стремящаяся к бесконечности по  $n$ .

14\*. Если  $0 < \alpha < 1/2$ , то почти все разбиения  $n$  (т. е. за исключением  $o(p(n))$ ) содержат

$$(1 + o(1)) \alpha \frac{\sqrt{6n}}{\pi} \log n$$

слагаемых, которые не превосходят  $n^{\alpha} (\sqrt{6}/\pi)$ .

15\*. Пусть  $k \geq 2$ ,  $\delta > 0$  фиксированы. Для каждого разбиения  $\pi_i$  числа  $n$  обозначаем через  $S_i$  число различных слагаемых этого  $\pi_i$ . Тогда множество целых, являющихся общими слагаемыми для каждого из разбиений  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$  числа  $n$ , по крайней мере так же велико, как  $((1/k) - \delta) \max_{1 \leq j \leq k} S_j$  для почти всех

$k$ -выборки  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$  из разбиений  $n$  (т. е. за исключением  $o(p(n)^k)$   $k$ -выборки из разбиений  $n$ ).

16.\* Если в  $k$ -выборках из задачи 15 ограничиваться разбиениями с различными частями, то имеет место аналогичный результат; при этом  $((1/k - \delta))$  заменяется на  $[1/(k2^k \log 2) - \delta]$ , а  $p(n)$  заменяется на  $p(\mathcal{D}, n)$ .

### Замечания

Отдавая предпочтение работам Мейнардуса при цитировании источников, нельзя не отметить целый ряд замечательных работ по теме этой главы, как то: [15, 3, 1, 14, 16, 29, 33, 34, 40, 41, 42]. Недавно в [25, 26, 27] были расширены результаты весьма важной работы [29], а в [30, 31, 32] получены существенные продвижения в этой области. Обзор этого направления представлен в разделе P72 в [20].

Задача 1 — [21]; задача 2, случай  $a_\alpha = 1$ , — [38], хотя весьма близкие результаты были получены еще Эйлером; случай  $a_\alpha = d$  — [22]; задачи 3—5 представляют собой модификацию результатов [4] о функции  $p(n)$ ; задачи 6—8 приведены в [24]; задача 9 — [39]; задача 10 — [2]; задача 11 — [25]; задача 12 — [34]; задача 13 — [5]; задача 14 — [37]; задача 15 — [35, 37]; задача 16 — [36, 37].

В задачах 13—16 представлены статистические аспекты разбиений. За более подробной информацией об этих статистических аспектах и связанных с ними статистических вопросах теории групп отсылаем к [5—12, 17—19, 28, 35—37].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Auluck F. C., Haselgrove C. B. (1952). On Ingham's Tauberian theorem for partitions. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **48**, p. 566—570.
2. Bateman P., Erdős P. (1956). Monotonicity of partition functions. — *Mathematika* **3**, p. 1—14.
3. Brigham N. A. (1950). A general asymptotic formula for partition functions. — Proc. Amer. Math. Soc. **1**, p. 182—191.
4. Erdős P. (1942). On an elementary proof of some asymptotic formulas in the theory of partitions. — Ann. of Math. **43**, p. 437—450.
5. Erdős P., Lehner J. (1941). The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer. — Duke Math. J. **8**, p. 335—345.
6. Erdős P., Turán P. (1965). On some problems of a statistical group theory, I. — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **4**, p. 175—186.
7. Erdős P., Turán P. (1967a). On some problems of a statistical group theory, II. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **18**, p. 151—163.
8. Erdős P., Turán P. (1967b). On some problems of a statistical group theory, III. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **18**, p. 171—173.
9. Erdős P., Turán P. (1967c). Certain problems of statistical group theory. — Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Kozl. **17**, p. 51—57.
10. Erdős P., Turán P. (1968). On some problems of a statistical group theory, IV. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **19**, p. 413—435.
11. Erdős P., Turán P. (1971a). On some general problems in the theory of partitions, I. — Acta Arith. **18**, p. 53—62.
12. Erdős P., Turán P. (1971b). On some problems of a statistical group theory, V. — Period. Math. Hungar. **1**, № 1, p. 5—13.
13. Hardy G. H., Ramanujan S. (1918). Asymptotic formulae in combinatory analysis. — Proc. London Math. Soc. (2) **17**, p. 75—115. (Also in Collected Papers of S. Ramanujan, pp. 276—309. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927; reprinted by Chelsea, New York, 1962).
14. Haselgrove C. B., Temperley H. N. V. (1954). Asymptotic formulae in the theory of partitions. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **50**, p. 225—241.
15. Ingham A. E. (1941). A Tauberian theorem for partitions. — Ann. of Math. (2) **42**, p. 1075—1090.



16. K o h l b e c k e r E. E. (1958). Weak asymptotic properties of partitions. — Trans. Amer. Math. Soc. **88**, p. 346—365.
17. L e h m e r D. H. (1972a). On reciprocally weighted partitions. — Acta Arith. **21**, p. 379—388.
18. L e h m e r D. H. (1972b). Calculating moments of partitions. — Proceedings of the Second Manitoba Conference on Numerical Mathematics, Oct. 5—7, 1972.
19. L e h m e r D. H. (1972c). Some structural aspects of the partitions of an integer, — Proceedings of the 1972 Number Theory Conference, University of Colorado, Boulder, p. 122—127.
20. L e V e q u e W. J. (1974). Reviews in Number Theory, Vol. 4. — Amer. Math. Soc. Providence, R. I.
21. L i v i n g o o d J. (1945) A partition function with the prime modulus  $p > 3$ . — Amer. J. Math. **67**, p. 194—208.
22. M a c M a h o n P. A. (1923) The connexion between the sum of the squares of the divisors and the number of partitions of a given number. — Messenger of Math. **52**, p. 113—116.
23. M e i n a r d u s G. (1954a). Asymptotische Aussagen über Partitionen. — Math. Z. **59**, p. 388—398.
24. M e i n a r d u s G. (1954b). Über Partitonen mit Differenzenbedingungen. — Math. Z. **61**, p. 289—302.
25. R i c h m o n d B. (1972). On a conjecture of Andrews. — Utilitas Math. **2**.
26. R i c h m o n d B. (1975a). Asymptotic relations for partitions. — J. Number Theory **7**, p. 389—405.
27. R i c h m o n d B. (1975b). A general asymptotic result for partitions. — Canadian J. Math. **27**, p. 1083—1091.
28. R i c h m o n d B. (1975c). The moments of partitions, I. — Acta Arith. **26**.
29. R o t h K. F., S z e k e r e s G. (1954). Some asymptotic formulae in the theory of partitions. — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **5**, p. 241—259.
30. S c h w a r z W. (1967). C. Mahler's Partitionsproblem. — J. Reine Angew. Math. **229**, p. 182—188.
31. S c h w a r z W. (1968). Schwache asymptotische Eigenschaften von Partitionen. — J. Reine Angew. Math. **232**, p. 1—16.
32. S c h w a r z W. (1969). Asymptotische Formeln für Partitionen. — J. Reine Angew. Math. **234**, p. 174—178.
33. S z e k e r e s G. (1951). An asymptotic formula in the theory of partitions. I. — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **2**, p. 85—108.
34. S z e k e r e s G. (1953). A asymptotic formula in the theory of partitions, II. — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **4**, p. 96—111.
35. T u r á n P. (1973). Combinatorics, partitions, group theory. — Proceedings of the International Colloquium on Combinatorial Theories, Rome, September 3—15, 1973.
36. T u r á n P. (1974). On a property of partitions. — J. Number Theory **6**, p. 405—411.
37. T u r á n P. (1975). On some phenomena in the theory of partitions. — Journees Arithmetiques de Bordeaux, Societe Math. de France, Asterisque 24—25, p. 311—319.
38. V a h l e n K. T. (1893). Beiträge zu einer additiven Zahlentheorie. — Crelle J. **112**, p. 1—36.
39. W a t s o n G. N. (1937). A note on Spence's logarithmic transcendent. — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **8**, p. 39—42.
40. W r i g h t E. M. (1931). Asymptotic partition formulae. I. — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **2**, p. 177—189.
41. W r i g h t E. M. (1933). Asymptotic partition formulae, II. — Proc. London Math. Soc. (2) **36**, p. 117—141.
42. W r i g h t E. M. (1934). Asymptotic partition formulae, III. — Acta Math. **63**.

## ТОЖДЕСТВА ТИПА РОДЖЕРСА — РАМАНУДЖАНА

### 7.1. Введение

Тождества Роджерса — Рамануджана составляют одну из наиболее интересных глав истории разбиений. Рассказ о них принято начинать с переписки гениального индийского математика Рамануджана и профессора Харди. В своем первом письме к Харди, датированном 16 января 1913 года, Рамануджан сформулировал несколько изящных теорем о непрерывных дробях: две из них представляют для нас особенный интерес:

$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{\ddots}}}}} = \left( \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) e^{2\pi/5},$$

$$1 - \frac{e^{-\pi}}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 - \frac{e^{-3\pi}}{\ddots}}}} = \left( \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) e^{\pi/5}.$$

В статье «The Indian Mathematician Ramanujan» (Amer. Math. Monthly, 1937, 44, p. 144) Харди так отзывался о них «[Эти формулы] совершенно поразили меня. Никогда я не видел ничего подобного. Одного взгляда на них достаточно, чтобы уяснить, что написаны они математиком высочайшего класса. Они должны быть верны уже хотя бы потому, что в противном случае никакая фантазия не привела бы к ним».

Перед тем как закончить изложение этой истории, полезно посмотреть, как эти две непрерывные дроби связаны с теми математическими конструкциями, которые мы уже рассматривали ранее. Рассмотрим функцию  $F(x)$ , аналитичную по  $x$  в 0,  $F(0) = 1$ , и такую, что она удовлетворяет следующему  $q$ -разностному линейному уравнению второго порядка:

$$F(x) = F(xq) + xqF(xq^2). \quad (7.1.1)$$

Тогда, если  $c(x, q) = F(x)/F(xq)$ , то

$$c(x, q) = 1 + \frac{xq}{c(xq, q)} = 1 + \frac{xq}{1 + (xq^2/c(xq^2, q))} \dots \quad (7.1.2)$$

и, значит, смысл теоремы Рамануджана о непрерывных дробях заключается в вычислении  $c(1, e^{-2\pi})$  и  $c(1, -e^{-\pi})$ .

Если мы теперь представим  $F(x)$  в виде ряда

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} A_n(q) x^n$$

и подставим его в (7.1.1), то, приравнявая коэффициенты при  $x^n$ , получим

$$A_n(q) = q^n A_n(q) + q^{2n-1} A_{n-1}(q). \quad (7.1.3)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A_n(q) &= \frac{q^{2n-1}}{1-q^n} A_{n-1}(q) = \frac{q^{(2n-1)+(2n-3)}}{(1-q^n)(1-q^{n-1})} A_{n-2}(q) = \dots = \\ &= \frac{q^{1+3+\dots+(2n-1)}}{(q)_n} A_0(q) = \frac{q^{n^2}}{(q)_n}. \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Значит,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n q^{n^2}}{(q)_n}. \quad (7.1.5)$$

Оказывается, что  $F(1)$  и  $F(q)$  можно выразить в терминах бесконечных произведений (что мы докажем в этой же главе), именно,

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^4}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^9}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots = \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{5n+1})^{-1} (1 - q^{5n+4})^{-1}, \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

$$\begin{aligned} F(q) &= 1 + \frac{q^2}{1-q} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^{12}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots = \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{5n+2})^{-1} (1 - q^{5n+3})^{-1}. \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

Представляя теперь  $c(1, q) = F(1)/F(q)$  через бесконечные произведения (7.1.6) и (7.1.7) и используя методы теории эллиптических тэта-функций, можно получить теоремы Рамануджана о непрерывных дробях.

Харди утверждал, что «трудно было бы отыскать формулы более красивые, нежели тождества Роджерса—Рамануджана»; в следующем отрывке, взятом из [31, с. 91], он так кратко излагает начальный период истории этих тождеств:

«Они [тождества] были впервые открыты в 1894 году Роджерсом — математиком большого таланта, но сравнительно малой

известности, памяти о котором мы во многом обязаны переоткрытию его результатов Рамануджаном. Роджерс был прекрасный аналитик, чьи способности, хотя и в меньшем масштабе, были сродни таланту Рамануджана; но никто не проявлял особого интереса к тому, что он делал, и работа, в которой он доказал эти формулы, прошла незамеченной.

Рамануджан переоткрыл эти тождества незадолго до 1913 года. Тогда он не имел их доказательства (и знал это), и ни один из математиков, к которым обращался я с этими формулами, не мог их доказать. Они, стало быть, были приведены без доказательства во втором томе «Комбинаторного анализа» Мак-Магона.

Ситуация разрешилась в 1917 году. В тот год Рамануджан, просматривая старые номера трудов лондонского математического общества, случайно натолкнулся на работу Роджерса. Я хорошо помню то удивление и восхищение, которые она у него вызвала. Последовала переписка, в процессе которой Роджерс пришел к значительному упрощению своего исходного доказательства. В то же самое время эти тождества опять были переоткрыты, на этот раз Шуром, отрезанным от Англии войной; он опубликовал два доказательства, одно из которых — «комбинаторное» и совершенно не похоже ни на какое другое известное доказательство. Сейчас имеются семь опубликованных доказательств: четыре уже указанных, два сильно упрощенных доказательства, полученные позже Рамануджаном и Роджерсом и опубликованные в *Papers*, и, наконец, полученное много позже доказательство Ватсона, основанное на совершенно иных идеях. Ни одно из этих доказательств не может быть названо и «простым», и «лобовым», поскольку простейшие из них являются по существу формальными проверками, и, без сомнения, было бы неосновательно рассчитывать на действительно легкое доказательство».

Замечания Харди о несуществовании действительно легкого доказательства тождеств Роджерса — Рамануджана сохраняют свою силу и по сей день. Подход, используемый здесь, относится к одному из «проверочных» (по Харди) доказательств, хотя он, вероятно, покажется и неуместным для такой книги. Можно отстаивать сделанный выбор — подход весьма плодотворен в расширении класса тождеств типа Роджерса — Рамануджана; мы покажем, что тем же способом можно изучать и другие тождества с разбиениями; в качестве примера мы докажем не только тождества Роджерса — Рамануджана, но также и их замечательное обобщение Гордона, одинаково как и некоторые другие тождества, независимо принадлежащие Гёллницу и Гордону.

В каждом отдельном случае оказывается, что теоремы о разбиениях соответствуют тождествам производящих функций. Интерпретации (7.1.6) и (7.1.7) в терминах разбиений представ-

лены в § 7.3. По желанию читатель может ознакомиться лишь с формулировками лемм 7.2—7.4 и прямо переходить к теоремам о разбиениях в § 7.3.

## 7.2. Производящие функции

Будем рассматривать следующие ряды при  $|x| < |q|^{-1}$ ,  $|q| < 1$ :

$$H_{k,i}(a; x; q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn} q^{kn^2+n-in} a^n (1 - x^i q^{2ni}) (axq^{n+1})_{\infty} (a^{-1})_n}{(q)_n (xq^n)_{\infty}}, \quad (7.2.1)$$

$$J_{k,i}(a; x; q) = H_{k,i}(a; xq; q) - xqaH_{k,i-1}(a; xq; q). \quad (7.2.2)$$

Отметим, что для  $a$  допустимо любое значение, даже  $a = 0$ , поскольку  $a^n (a^{-1})_n = (a - 1)(a - q) \dots (a - q^{n-1})$  — это просто многочлен от  $a$ , чье значение в нуле равно  $(-1)^n q^{n(n-1)/2}$ .

Мало чем можно мотивировать формулы этого параграфа. Фактически обширная практика теории базисных гипергеометрических рядов и тождеств разбиений показывает, что «хорошо уравновешенные» базисные гипергеометрические ряды доставляют производящие функции для целого ряда семейств тождеств с разбиениями. Так, ряд (7.2.1) (бесконечные произведения можно вынести:  $\sum \alpha_n (Aq^n)_{\infty}^{\pm 1} = (A)_{\infty}^{\pm 1} \sum \alpha_n (A_n)^{\pm 1}$ ) представляет собой пример хорошо уравновешенного ряда.

**Л е м м а 7.1.**

$$H_{k,i}(a; x; q) - H_{k,i-1}(a; x; q) = x^{i-1} J_{k,k-i+1}(a; x; q). \quad (7.2.3)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Замечая, что

$$\begin{aligned} q^{-in} (1 - x^i q^{2ni}) - q^{-(i-1)n} (1 - x^{i-1} q^{2n(i-1)}) = \\ = q^{-in} (1 - q^n) + x^{i-1} q^{n(i-1)} (1 - xq^n), \end{aligned}$$

видим, что

$$\begin{aligned} H_{k,i}(a; x; q) - H_{k,i-1}(a; x; q) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn} q^{kn^2+n} a^n (axq^{n+1})_{\infty} (a^{-1})_n}{(q)_n (xq^n)_{\infty}} q^{-in} (1 - q^n) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn} q^{kn^2+n} a^n (axq^{n+1})_{\infty} (a^{-1})_n q^{n(i-1)} (1 - xq^n) x^{i-1}}{(q)_n (xq^n)_{\infty}} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{kn} q^{kn^2+n} a^n (axq^{n+1})_{\infty} (a^{-1})_n q^{-in}}{(q)_{n-1} (xq^n)_{\infty}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn} q^{kn^2+n} a^n (axq^{n+1})_{\infty} (a^{-1})_n x^{i-1} q^n (i-1)}{(q)_n (xq^{n+1})_{\infty}} = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn+k} q^{kn^2+n+2kn+k+1} a^{n+1} (axq^{n+2})_{\infty} (a^{-1})_{n+1} q^{-in-i}}{(q)_n (xq^{n+1})_{\infty}} + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn} q^{kn^2+n} a^n (axq^{n+1})_{\infty} (a^{-1})_n x^{i-1} q^n (i-1)}{(q)_n (xq^{n+1})_{\infty}} = \\
& = x^{i+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn} q^{kn^2+in} a^n (axq^{n+2})_{\infty} (a^{-1})_n}{(q)_n (xq^{n+1})_{\infty}} \times \\
& \times \left\{ (1 - axq^{n+1}) + ax^{k-i+1} q^{2n(k-i)+k-i+1} \left( 1 - \frac{q^n}{a} \right) \right\} = \\
& = x^{i-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn} q^{kn^2+in} a^n (axq^{n+2})_{\infty} (a^{-1})_n}{(q)_n (xq^{n+1})_{\infty}} \times \\
& \times [1 - (xq)^{k-i+1} q^n [2(k-i+1)-1]] - \\
& - x^{i-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn} q^{kn^2+in} a^n (axq^{n+2})_{\infty} (a^{-1})_n}{(q)_n (xq^{n+1})_{\infty}} \times \\
& \times \{ axq^{n+1} [1 - (xq)^{k-i} q^n [2(k-i)-1]] \} = \\
& = x^{i-1} [H_{k, k-i+1}(a; xq; q) - axq H_{k, k-i}(a; xq; q)] = \\
& = x^{i-1} J_{k, k-i+1}(a; x; q).
\end{aligned}$$

Л е м м а 7.2.

$$\begin{aligned}
J_{k, i}(a; x; q) - J_{k, i-1}(a; x; q) & = \\
& = (xq)^{i-1} (J_{k, k-i+1}(a; xq; q) - aJ_{k, k-i+2}(a; xq; q)). \quad (7.2.4)
\end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\begin{aligned}
J_{k, i}(a; x; q) - J_{k, i-1}(a; x; q) & = \\
& = (H_{k, i}(a; xq; q) - H_{k, i-1}(a; xq; q)) - \\
& - axq (H_{k, i-1}(a; xq; q) - H_{k, i-2}(a; xq; q)) = \\
& = (xq)^{i-1} J_{k, k-i+1}(a; xq; q) - a(xq)^{i-1} J_{k, k-i+2}(a; xq; q).
\end{aligned}$$

В исследуемых задачах имеется несколько моментов, в которых необходимо обращаться к представлению производящих функций

в виде бесконечных произведений. Такие представления даны в следующих леммах.

**Л е м м а 7.3.** Если  $1 \leq i \leq k$ ,  $|q| < 1$ , то

$$J_{k,i}(0; 1; q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}, \quad (7.2.5)$$

$$n \not\equiv 0, \quad \pm i \pmod{2k+1}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно (7.2.2) имеем

$$\begin{aligned} J_{k,i}(0; 1; q) &= H_{k,i}(0; q; q) = \\ &= (q)_{\infty}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{kn^2+(k-i+1)n} (-1)^n q^{n(n-1)/2} (1 - q^{(2n+1)i}) = \\ &= (q)_{\infty}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(2k+1)n(n+1)/2-in} (1 - q^{(2n+1)i}) \stackrel{(2.9)}{=} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}, \quad n \not\equiv 0, \quad \pm i \pmod{2k+1}. \end{aligned}$$

**Л е м м а 7.4.** Если  $1 \leq i \leq k$ ,  $|q| < 1$ , то

$$J_{k,i}(-q^{-1}; 1; q^2) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}, \quad (7.2.6)$$

$$n \not\equiv 2 \pmod{4}, \quad n \not\equiv 0, \quad \pm(2i-1) \pmod{4k}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**

$$\begin{aligned} J_{k,i}(-q^{-1}; 1; q^2) &= H_{k,i}(-q^{-1}; q^2; q^2) + qH_{k,i-1}(-q^{-1}; q^2; q^2) = \\ &= \frac{(-q; q^2)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{2kn+2kn^2-(2i-1)n} \frac{1 - q^{2i+4ni}}{1 + q^{2n+1}} + \right. \\ &\quad \left. + q \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{2kn+2kn^2-(2i-3)n} \frac{1 - q^{2i-2+4ni-4n}}{1 + q^{2n+1}} \right) = \\ &= \frac{(-q; q^2)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{2kn+2kn^2+n} \times \\ &\quad \times \frac{q^{-2in} - q^{2i+2ni} + q^{1-2in+2n} - q^{-1+2i+2ni-2n}}{1 + q^{2n+1}} = \\ &= \frac{(-q; q^2)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{2kn^2+(2k+1-2i)n} (1 - q^{(2n+1)(2i-1)}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-q; q^2)_\infty}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{2kn^2 + (2k-2i+1)n} = \\
&= \frac{(-q; q^2)_\infty}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - q^{4kn+4k}) (1 - q^{4kn+2i-1}) (1 - q^{4kn+4k-2i+1}) = \\
&= \frac{1}{(q; q^2)_\infty (q^4; q^4)_\infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{4k(n+1)}) (1 - q^{4kn+2i-1}) \times \\
&\quad \times (1 - q^{4k(n+1)-2i+1}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}, \\
&\quad n \not\equiv 2 \pmod{4}, \quad n \not\equiv 0, \quad \pm(2i-1) \pmod{4k}.
\end{aligned}$$

### 7.3. Тождества Роджерса — Рамануджана и их обобщение Гордона

В этом параграфе аналитические результаты § 7.2 применяются для доказательства следующей теоремы, принадлежащей Гордону.

**Т е о р е м а 7.5.** Пусть  $B_{k,i}(n)$  обозначает число разбиений  $n$  вида  $(b_1 b_2 \dots b_3)$ , где  $b_j - b_{j+k-1} \geq 2$ , и не более чем  $i - 1$  частей  $b_j$  равны 1. Пусть  $A_{k,i}(n)$  обозначает число разбиений  $n$  на части  $\not\equiv 0, \pm i \pmod{2k+1}$ . Тогда  $A_{k,i}(n) = B_{k,i}(n)$  для всех  $n$ .

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 7.5, стоит привести два ее наиболее существенных следствия, именно, тождества Роджерса — Рамануджана, сформулированные в терминах разбиений.

**С л е д с т в и е 7.6** (первое тождество Роджерса — Рамануджана). Разбиения целого  $n$ , в которых разность между любыми двумя частями превосходит единицу, равночисленны разбиениям  $n$  на части  $\equiv 1$  или  $4 \pmod{5}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Положить  $k = i = 2$  в теореме 7.5.

**С л е д с т в и е 7.7** (второе тождество Роджерса — Рамануджана). Разбиения целого  $n$ , в которых и разность между любыми двумя частями и каждая часть превосходят единицу, равночисленны разбиениям  $n$  на части  $\equiv 2$  или  $3 \pmod{5}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В теореме 7.5 положить  $k = i + 1 = 2$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 7.5.** Пусть  $b_{k,i}(m, n)$  обозначает число разбиений  $(b_1 b_2 \dots b_m)$  числа  $n$  ровно с  $m$  частями



таких, что  $b_j \geq b_{j+1}$ ,  $b_j - b_{j+k-1} \geq 2$ , и не более чем  $i - 1$  частей  $b_j$  равны 1. Тогда для  $1 \leq i \leq k$

$$b_{k,i}(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = n = 0, \\ 0, & \text{если } m \leq 0 \text{ или } n \leq 0, \text{ но } (m, n) \neq (0, 0); \end{cases} \quad (7.3.1)$$

$$b_{k,0}(m, n) = 0; \quad (7.3.2)$$

$$b_{k,i}(m, n) - b_{k,i-1}(m, n) = b_{k,k-i+1}(m - i + 1, n - m). \quad (7.3.3)$$

Равенства (7.3.1) и (7.3.2) очевидны, в связи с чем напоминаем, что разбиение неположительного числа или с неположительным числом частей есть пустое разбиение нуля.

Равенство (7.3.3) требует внимательного рассмотрения: функция  $b_{k,i}(m, n) - b_{k,i-1}(m, n)$  перечисляет те разбиения, перечисляемые функцией  $b_{k,i}(m, n)$ , среди которых имеется ровно  $i - 1$  единиц. Преобразуем это множество разбиений, удаляя  $i - 1$  единиц и вычитая по 1 из каждой оставшейся части. Полученные разбиения  $(b'_1 \dots b'_{m-i+1})$  имеют  $m - i + 1$  частей; они суть разбиения числа  $n - m$ , а части их удовлетворяют неравенству  $b'_j - b'_{j+k-1} \geq 2$ . Поскольку исходная единица присутствует  $i - 1$  раз, а полное число вхождений единиц и двоек не превосходит  $k - 1$  (согласно разностному условию), видим, что исходная двойка наличествует не более чем  $(k - i + 1) - 1$  раз и, таким образом, после нашего преобразования 1 присутствует не более  $k - i + 1$  раз. Описанное выше преобразование устанавливает взаимно однозначное соответствие между разбиениями, перечисляемыми функцией  $b_{k,i}(m, n) - b_{k,i-1}(m, n)$ , и разбиениями, перечисляемыми функцией  $b_{k,k-i+1}(m - i + 1, n - m)$ , так что (7.3.3) установлено.

Сделаем теперь простое, но весьма существенное замечание: функция  $b_{k,i}(m, n)$  ( $0 \leq i \leq k$ ) однозначно определяется равенствами (7.3.1), (7.3.2) и (7.3.3). Чтобы убедиться в этом, достаточно провести двойную индукцию сначала по  $n$ , потом по  $i$ . Равенство (7.3.1) обеспечивает область  $n \leq 0$ ,  $m \leq 0$ ,  $i > 0$ , а равенство (7.3.2) — все  $n$  при  $i = 0$ . Равенство (7.3.3) представляет  $b_{k,i}(m, n)$  как двучленную сумму, в которой первый член имеет нижний индекс  $i$ , а второй — нижний индекс  $n$  (поскольку можно предполагать, что  $m > 0$ ).

Теперь рассмотрим

$$J_{k,i}(0; x; q) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{k,i}(m, n) x^m q^n.$$

Из того факта, что для  $1 \leq i \leq k$

$$J_{k,i}(0; 0; q) = J_{k,i}(0; x; 0) = 1,$$

видим, что для  $1 \leq i \leq k$

$$c_{k,i}(m, n) = \begin{cases} 1, & m = n = 0, \\ 0, & m \leq 0 \text{ или } n \leq 0, (m, n) \neq (0, 0). \end{cases} \quad (7.3.4)$$

Из того факта, что

$$J_{k,0}(0; k; q) = H_{k,0}(0; xq; q) = 0,$$

видим, что

$$c_{k,0}(m, n) = 0. \quad (7.3.5)$$

Наконец, приравнявая коэффициенты при  $x^m q^n$  в обеих частях равенства (7.2.4) при  $a = 0$ , видим, что

$$c_{k,i}(m, n) - c_{k,i-1}(m, n) = c_{k,k-i+1}(m - i + 1, n - m). \quad (7.3.6)$$

Итак, видим, что это  $c_{k,i}(m, n)$  также удовлетворяет системе уравнений (7.3.1)—(7.3.3), которая однозначно определяет  $b_{k,i}(m, n)$ . Стало быть,  $b_{k,i}(m, n) = c_{k,i}(m, n)$  для всех  $m$  и  $n$  при  $0 \leq i \leq k$ .

Поэтому согласно  $\sum_{m \geq 0} b_{k,i}(m, n) = B_{k,i}(n)$  видим, что

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} B_{k,i}(n) q^n &= \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} b_{k,i}(m, n) q^n = J_{k,i}(0; 1; q) = \\ &\stackrel{(7.2.5)}{=} \prod_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0, \pm i \pmod{2k+1}}}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} \stackrel{(1.2.3)}{=} \sum_{n \geq 0} A_{k,i}(n) q^n. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при  $q^n$  в крайних членах этой цепочки, видим, что  $A_{k,i}(n) = B_{k,i}(n)$ .

Теорема 7.5 имеет аналитический аналог, который мы теперь и докажем.

**Теорема 7.8.** Пусть  $1 \leq i \leq k$ ,  $k \geq 2$ ,  $|q| < 1$ ; тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n_1, \dots, n_{k-1} \geq 0} \frac{q^{N_1^2 + \dots + N_{k-1}^2 + N_i + N_{i+1} + \dots + N_{k-1}}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \dots (q)_{n_{k-1}}} &= \\ &= \prod_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0, \pm i \pmod{2k+1}}}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}, \quad (7.3.7) \end{aligned}$$

где  $N_j = n_j + n_{j+1} + \dots + n_{k-1}$ .

Доказательство. Докажем, что

$$J_{k,i}(0; x; q) = \sum_{n_1, \dots, n_{k-1} \geq 0} \frac{x^{N_1 + \dots + N_{k-1}} q^{N_1^2 + \dots + N_{k-1}^2 + N_i + N_{i+1} + \dots + N_{k-1}}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \dots (q)_{n_{k-1}}}. \quad (7.3.8)$$

Мы получим (7.3.7) из (7.3.8), полагая  $x = 1$  и подключая (7.2.5).

Само равенство (7.3.8) следует из равенства

$$J_{k,i}(0; x; q) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{(k-1)n} q^{(k-1)n^2 + (k-i)n}}{(q)_n} J_{k-1,i}(0; xq^{2n}; q), \quad (7.3.9)$$

для доказательства которого индукцией по  $k$  заметим, что  $J_{k,k+1}(0; x; q) = J_{k,k}(0; x; q)$  (положить  $i = k + 1$  в (7.2.4) и вспомнить, что  $J_{k,0}(0; xq; q) = H_{k,0}(0; xq^2; q) = 0$ ) и что  $J_{1,1}(0; x; q) = 1$  (так как согласно (7.2.4)

$$\begin{aligned} J_{1,1}(0; x; q) &= J_{1,1}(0; xq; q) = J_{1,1}(0; xq^2; q) = \dots = \\ &= J_{1,1}(0; xq^n; q) \rightarrow J_{1,1}(0; 0; q) = 1). \end{aligned}$$

Для доказательства (7.3.9) определим

$$R_{k,i}(x; q) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{(k-1)n} q^{(k-1)n^2 + (k-i)n}}{(q)_n} J_{k-1,i}(0; xq^{2n}; q).$$

Тогда для  $1 \leq i \leq k$

$$R_{k,i}(0; q) = R_{k,i}(x; 0) = 1, \quad (7.3.10)$$

$$R_{k,0}(x; q) = 0. \quad (7.3.11)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} R_{k,i}(x; q) - R_{k,i-1}(x; q) &= \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{x^{(k-1)n} q^{(k-1)n^2 + (k-i)n}}{(q)_n} (J_{k-1,i}(0; xq^{2n}; q) - \\ &\quad - q^n J_{k-1,i-1}(0; xq^{2n}; q)) = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{x^{(k-1)n} q^{(k-1)n^2 + (k-i)n}}{(q)_n} (J_{k-1,i-1}(0; xq^{2n}; q) + \\ &\quad + (xq^{2n+1})^{i-1} J_{k-1,k-i}(0; xq^{2n+1}; q) - q^n J_{k-1,i-1}(0; xq^{2n}; q)) = \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{x^{(k-1)n} q^{(k-1)n^2 + (k-1)n}}{(q)_n} (1 - q^n) J_{k-1,i-1}(0; xq^{2n}; q) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (xq)^{i-1} \sum_{n \geq 0} \frac{(xq)^{(k-1)n} q^{(k-1)n^2 + (k+i-2)n}}{(q)_n} J_{k-1, k-i} (0; xq^{2n+1}; q) = \\
& = x^{k-1} q^{2k-i-1} \sum_{n \geq 0} \frac{x^{(k-1)n} q^{(k-1)n^2 + (3k-i-2)n}}{(q)_n} J_{k-1, i-1} (0; xq^{2n+2}; q) + \\
& + (xq)^{i-1} \sum_{n \geq 0} \frac{x^{(k-1)n} q^{(k-1)n^2 + (k+i-2)n}}{(q)_n} (J_{k-1, k-i+1} (0; xq^{2n+1}; q) - \\
& - (xq^{2n+2})^{k-i} J_{k-1, i-1} (0; xq^{2n+2}; q)) = \\
& = x^{k-1} q^{2k-i-1} \sum_{n \geq 0} \frac{x^{(k-1)n} q^{(k-1)n^2 + (3k-i-2)n}}{(q)_n} J_{k-1, i-1} (0; xq^{2n+2}; q) + \\
& + (xq)^{i-1} \sum_{n \geq 0} (xq)^{(k-1)n} q^{(k-1)n^2 + (k-(k-i+n))n} J_{k-1, k-i+1} (0; xq^{2n+1}; q) - \\
& - x^{k-1} q^{2k-i-1} \sum_{n \geq 0} \frac{x^{(k-1)n} q^{(k-1)n^2 + (3k-i-2)n}}{(q)_n} J_{k-1, i-1} (0; xq^{2n+2}; q) = \\
& = (xq)^{i-1} R_{k, k-i+1}(xq; q). \quad (7.3.12)
\end{aligned}$$

Вспоминая, что коэффициенты в выражении для  $J_{k,i}(0; x; q)$  однозначно определяются посредством (7.3.4), (7.3.5) и (7.3.6), замечаем, что поскольку  $R_{k,i}(x; q)$  удовлетворяет (7.3.10), (7.3.11) и (7.3.12), то его коэффициенты должны удовлетворять (7.3.4), (7.3.5) и (7.3.6), а значит,  $R_{k,i}(x; q) = J_{k,i}(0; x; q)$  для  $0 \leq i \leq k$ . Таким образом, равенство (7.3.9), а значит, и теорема 7.8 доказаны.

**С л е д с т в и е 7.9** (равенство (7.1.6)).

$$\begin{aligned}
1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^4}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^9}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots = \\
= \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{5n+1})^{-1} (1 - q^{5n+4})^{-1}.
\end{aligned}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Положить  $k = i = 2$  в теореме 7.8.

**С л е д с т в и е 7.10** (равенство (7.1.7)).

$$\begin{aligned}
1 + \frac{q^2}{1-q} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^{12}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots = \\
= \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{5n+2})^{-1} (1 - q^{5n+3})^{-1}.
\end{aligned}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Положить  $k = 2$ ,  $i = 1$  в теореме 7.8.

#### 7.4. Тождества Гёллница — Гордона и их обобщение

Для ознакомления с общими тождествами типа Роджерса — Рамануджана обратимся к результатам, независимо полученным в 1960 году Гёллницем и Гордоном. В действительности мы докажем общую теорему, которая сводится к тождествам Гёллница — Гордона в тех специальных случаях, когда  $k = i = 2$ ,  $k = i + 1 = 2$ .

**Т е о р е м а 7.11.** Пусть  $i$  и  $k$  — целые, причем  $0 < i \leq k$ . Пусть  $C_{k,i}(n)$  обозначает число разбиений  $n$  на части  $\not\equiv 2 \pmod{4}$  и  $\not\equiv 0, \pm(2i-1) \pmod{4k}$ . Пусть  $D_{k,i}(n)$  обозначает число разбиений  $(b_1 b_2 \dots b_s)$  числа  $n$ , в которых нет повторяющихся нечетных частей,  $b_j \geq b_{j+1}$ ,  $b_j - b_{j+k-1} \geq 2$ , если  $b_j$  нечетно,  $b_j - b_{j+k-1} > 2$ , если  $b_j$  четно, и не более  $i-1$  частей не превышают двух. Тогда  $C_{k,i}(n) = D_{k,i}(n)$ .

**З а м е ч а н и е.** Доказательство этой теоремы подобно доказательству теоремы 7.5. Роль  $J_{k,i}(0; x; q)$  из теоремы 7.5 теперь играет  $J_{k,i}(q^{-1}; x; q^2)$ , так что будем быстро проходить через те куски доказательства, которые имеют близкую основу.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $d_{k,i}(m, n)$  обозначает число разбиений, перечисляемых функцией  $D_{k,i}(n)$  и имеющих ровно  $m$  частей. Как и в теореме 7.5, видим, что для  $1 \leq i \leq k$

$$d_{k,i}(m, n) = \begin{cases} 1, & m = n = 0, \\ 0, & m \leq 0 \text{ или } n \leq 0, \quad (m, n) \neq (0, 0). \end{cases} \quad (7.4.1)$$

Далее утверждаем, что

$$d_{k,1}(m, n) = d_{k,k}(m, n - 2m), \quad (7.4.2)$$

а при  $1 < i \leq k$

$$d_{k,i}(m, n) - d_{k,i-1}(m, n) = d_{k,k-i+1}(m - i + 1, n - 2m) + \\ + d_{k,k-i+2}(m - i + 1, n - 2m + 1). \quad (7.4.3)$$

Доказательство (7.4.2) и (7.4.3) совершенно аналогично доказательству (7.3.3). Например, функция  $d_{k,i}(m, n) - d_{k,i-1}(m, n)$  перечисляет число разбиений типа перечисляемого функцией  $d_{k,i}(m, n)$ , с тем дополнительным условием, что полное число частей, не превосходящих 2, равно  $i - 1$ . Такие разбиения можно разбить на два непересекающиеся класса: 1) те, которые имеют 1 в качестве части; 2) те, которые ею не обладают. Преобразуем разбиения 1-го класса, изымая 1 и  $i - 2$  двоек и вычитая 2 из каждой из оставшихся частей. Это преобразование устанавливает взаимно однозначное соответствие между разбиениями 1-го класса и разбиениями, перечисляемыми функцией  $d_{k,k-i+2}(m - i + 1, n - 2m + 1)$ .

Преобразуем теперь разбиение во 2-м классе, удаляя  $i - 1$  двоек и вычитая 2 из каждой оставшейся части. Таким способом устанавливается взаимно однозначное соответствие между разбиениями 2-го класса и разбиениями, перечисляемыми функцией  $d_{k, k-i+1}(m - i + 1, n - 2m)$ . Это доказывает (7.4.3), а (7.4.2) получается аналогично. Кроме того (так же, как  $b_{k, i}(m, n)$  однозначно определяется посредством (7.3.1)–(7.3.3)), можно легко показать, что  $d_{k, i}(m, n)$  однозначно определяется равенствами (7.4.1), (7.4.2) и (7.4.3).

Теперь рассмотрим

$$J_{k, i}(-q^{-1}; x; q^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e_{k, i}(m, n) x^m q^n.$$

То, что (7.4.1) также верно и для  $e_{k, i}(m, n)$ , следует из того, что

$$J_{k, i}(-q^{-1}; 0; q^2) = J_{k, i}(-q^{-1}; x; q^2)|_{q=0} = 1,$$

в то время как исполнимость (7.4.2) для  $e_{k, i}(m, n)$  следует из того, что

$$J_{k, 1}(-q^{-1}; x; q^2) \stackrel{(7.2.2)}{=} H_{k, 1}(-q^{-1}; xq; q^2) \stackrel{(7.2.3)}{=} J_{k, k}(-q^{-1}; xq; q^2).$$

Наконец, выводим исполнимость (7.4.3) для  $e_{k, i}(m, n)$  из того факта, что

$$\begin{aligned} J_{k, i}(-q^{-1}; x; q^2) - J_{k, i-1}(-q^{-1}; x; q^2) &= \\ &= (xq^2)^{i-1} (J_{k, k-i+1}(-q^{-1}; xq^2; q^2) + q^{-1} J_{k, k-i+2}(-q^{-1}; xq^2; q^2)) = \\ &= x^{i-1} q^{2i-2} J_{k, k-i+1}(-q^{-1}; xq^2; q^2) + \\ &\quad + x^{i-1} q^{2i-3} J_{k, k-i+2}(-q^{-1}; xq^2; q^2). \end{aligned}$$

Поэтому  $d_{k, i}(m, n) = e_{k, i}(m, n)$  для  $1 \leq i \leq k$  и всех  $m$  и  $n$ .

Следовательно, для  $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} D_{k, i}(n) q^n &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_{k, i}(m, n) q^n = J_{k, i}(-q^{-1}; 1; q^2) \stackrel{(7.2.6)}{=} \\ &= \prod_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 2 \pmod{4} \\ n \not\equiv 0, \pm(2i-1) \pmod{4k}}}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} \stackrel{(1.2.3)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} C_{k, i}(n) q^n. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при  $q^n$  в крайних членах этой цепочки равенств, видим, что  $C_{k, i}(n) = D_{k, i}(n)$  для  $1 \leq i \leq k$  и всех  $n$ .

В завершение этого параграфа заметим, что имеется результат, аналогичный теореме 7.8 для  $J_{k,i}(-q^{-1}; 1; q^2)$ . Например, при  $N_j = n_j + \dots + n_{k-1}$  справедливо равенство

$$\sum_{n_1, \dots, n_{k-1} \geq 0} \frac{(-q; q^2)_{N_1} q^{N_1^2 + \dots + N_{k-1}^2}}{(q^2; q^2)_{n_1} (q^2; q^2)_{n_2} \dots (q^2; q^2)_{n_{k-1}}} = J_{k,k}(-q^{-1}; 1; q^2) =$$

$$= \prod_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0, \pm(2k-1) \pmod{4k}}}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}. \quad (7.4.4)$$

### Задачи

1. Пусть  $s_j(m, n)$  обозначает число разбиений  $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m)$  числа  $n$  таких, что для  $1 \leq i < m$  выполнено неравенство  $\lambda_i - \lambda_{j+1} \geq 3$ , причем оно должно быть строгим, если  $3|\lambda_i$  и  $\lambda_m \geq j$ . Доказать таким же образом, как и теорему 7.5, что если  $f_j(x) = \sum_{m, n \geq 0} s_j(m, n) x^m q^n$ , то

$$f_1(x) - f_2(x) = xq f_1(xq^3),$$

$$f_2(x) - f_3(x) = xq^2 f_2(xq^3),$$

$$f_3(x) - f_4(x) = xq^3 f_4(xq^3),$$

$$f_4(x) = f_1(xq^3).$$

2. Из задачи 1 вывести, что

$$f_1(x) = (1 + xq + xq^2) f_1(xq^3) + xq^3 (1 - xq^3) f_1(xq^6).$$

3. Из задачи 2 вывести, что

$$f_1(x) = (x; q^3)_{\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{(-q; q^3)_n (-q^2; q^3)_n x^n}{(q^3; q^3)_n}.$$

4. Из задачи 3 вывести теорему Шура: число разбиений  $n$  на части, сравнимые с 1 или 5 по модулю 6, равно числу разбиений  $n$ , в которых разница между всеми частями по крайней мере 3, а между кратными 3 — по крайней мере 6.

5. Методы задач 1—4 можно распространить и на доказательство целого семейства тождеств, подобных теореме Шура: пусть  $j$  обозначает наименьший положительный вычет  $j$  по модулю  $2^n$ ; пусть  $\omega(j)$  обозначает число степеней 2, используемых в двоичном представлении  $j$ , а  $v(j)$  — наименьшую степень 2, входящую в двоичное представление  $j$  (например, если  $n = 4$ ,  $j = 28$ , то  $j = 12$ ,  $\omega(j) = 3$ ,  $v(j) = 4$ ,  $\omega(j) = 2$ ,  $v(j) = 4$ ). Пусть  $A(N)$  обозначает число разбиений  $N$  на части,  $\equiv 1, 2^n + 1, 2^n + 3, \dots, 2^n + 2^{n-1} - 1 \pmod{2^{n+1} - 2}$ . Пусть  $B(N)$  — число разбиений  $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s)$  числа  $N$  ( $s$  произвольно) таких, что для  $1 \leq i < s$  выполнено неравенство  $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq \omega(\lambda_{i+1})(2^n - 1) + v(\lambda_{i+1}) - \lambda_{i+1}$ ; тогда для всех  $N$  выполнено тождество  $A(N) = B(N)$ .

6. Вывести теорему Шура из задачи 5 в случае  $n = 2$ .

7. Тот случай задачи 5, при котором  $n = 3$ , влечет, что число разбиений  $N$  на части,  $\equiv 1, 9, 11 \pmod{14}$ , равно числу разбиений  $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s)$  ( $s$  произвольно) числа  $n$  таких, что для  $1 \leq i < s$  выполнены неравенства

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq \begin{cases} 7, & \lambda_{i+1} \equiv 1, 2, 7 \pmod{7}, \\ 12, & \lambda_{i+1} \equiv 3 \pmod{7}, \\ 10, & \lambda_{i+1} \equiv 5, 6 \pmod{7}, \\ 15, & \lambda_{i+1} \equiv 0 \pmod{7}. \end{cases}$$

8. Пусть  $\mathcal{A}_{k,a}(N)$  обозначает число разбиений  $N$  на части,  $\neq 0$ ,  $\pm 2a \pmod{4k+2}$ . Пусть  $\mathcal{R}_{k,a}(N)$  обозначает число разбиений  $(1^{f_1} 2^{f_2} 3^{f_3} \dots)$  числа  $N$  таких, что  $f_1 \leq 2a-1$ , и

$$f_i + f_{i+1} \leq \begin{cases} 2k-1, & f_1 \text{ четно,} \\ 2k, & f_1 \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Тогда  $\mathcal{A}_{k,a}(N) = \mathcal{R}_{k,a}(N)$  при всех  $N$ .

Можно доказать этот результат, подобно теореме 7.5, но используя

$$J_{k,i}(0; x^2; q^2) (-xq)_{\infty}$$

вместо  $J_{k,a}(0; x^2; q)$ .

9. Число разбиений  $n$  на части, сравнимые с 2, 3, 4 по модулю 6, равно числу разбиений  $n$  без последовательных целых, без единиц и без частей, повторяемых более чем дважды.

Для доказательства рассмотреть  $J_{2,i+1/2}(0; x^2; q^2) (-xq)_{\infty}$ .

10. Довольно просто доказать, что при  $a = 1, 2$  или 3

$$\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq 0, \pm a \pmod{7}}}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} = (-q)_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2+2[(4-a)/2]n}}{(q^2; q^2)_n (-q)_{2n+1-[a/2]}}.$$

Это устанавливается так: если

$$R_a(x) = R_a(x, q) = (-xq)_{\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{q^{2n^2+2[(4-a)/2]n}}{(q^2; q^2)_n (-xq)_{2n+1-[a/2]}},$$

то  $R_3(x) - R_2(x) = x^2 q^2 R_1(xq)$ ;  $R_2(x) - R_1(x) = xq R_2(xq)$ ;  $R_1(x) = R_3(xq)$ . Из этого немедленно следует, что  $R_a(x) = J_{3,a}(0; x; q)$ .

11\*. Число разбиений  $n$  на части, сравнимые с 2, 5, 11 по модулю 12, равно числу разбиений  $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s)$  ( $s$  произвольно) числа  $n$  таких, что  $\lambda_s \neq 1$  или 3 и для  $1 \leq i < s$  выполнено неравенство  $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 6$ , причем здесь должно иметь место строгое неравенство, если  $\lambda_{i+1} \equiv 0, 1$  или  $3 \pmod{6}$ .

Эта теорема выводится из следующих аналитических тождеств. Определим  $\Lambda_n$  посредством соотношения

$$\frac{(-xq^2; q^6)_{\infty} (-xq^4; q^6)_{\infty} (-xq^5; q^6)_{\infty}}{(x; q^6)_{\infty}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_n x^n}{(q^6; q^6)_n}.$$

Пусть  $c_m(n)$  обозначает число разбиений  $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s)$  ( $s$  произвольно) числа  $n$  таких, что  $m \geq \lambda_1$ ,  $\lambda_s \neq 1$  или 3 и для  $1 \leq i < s$   $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 6$ , причем неравенство строгое, если  $\lambda_{i+1} \equiv 0, 1$  или  $3 \pmod{6}$ ; пусть

$$d_m(q) = \sum_{n \geq 0} c_m(n) q^n.$$



Тогда

$$d_{6n-1}(q) = \sum_{0 \leq 2j \leq n} q^{6nj-3j^2+2j} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}_{q^6} \Lambda_{n-2j},$$

где  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{q^6}$  есть  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  с заменой  $q$  на  $q^6$ .

### З а м е ч а н и я

Материал введения в основном почерпнут из гл. 1 и 6 [31]. Первые две непрерывные дроби во введении были доказаны в [40]. Аналитические тождества из § 7.2 при  $a = 0$  встречались в [35] и [38], а при  $a = -q^{-1}$  — в [6]. Весьма общие тождества такой природы представлены в [9, 20].

Теорема 7.5 принадлежит Гордону (1961), а приведенное здесь ее доказательство — Эндрюсу (1966) (см. также [13, 22, 23]); теорема 7.8 — [21]; связанная с ней теорема о полиномах Алдера получена в [39]; теорема 7.11 в случае  $k = 2$  — [27, 29]; для произвольного  $k$  этот результат был получен в [6]. Тождество 7.4.4 — [25].

Для более детального ознакомления с работами этого направления укажем ряд обзоров с обширной библиографией: [1, 14, 18, 19, 30]. Указания на последние разработки в этой области можно найти в разделе P68 [33].

Задачи 1—3 — [7]; задача 4 — [7, 15, 16, 37]; задачи 5—7 — [8, 10, 18]; задача 8 — [4]; задача 9 — [5, 12]; задача 10 — [38, 9, 22]; задача 11 — [27, 11].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Alder H. L. (1969). Partition identities—from Euler to the present. — Amer. Math. Monthly **76**, p. 733—746.
2. Andrews G. E. (1966). An analytic proof of the Rogers—Ramanujan—Gordon identities. — Amer. J. Math. **88**, p. 844—846.
3. Andrews G. E. (1967a). On Schur's second partition theorem. — Glasgow Math. J. **9**, p. 127—132.
4. Andrews G. E. (1967b). Partition theorems related to the Rogers—Ramanujan identities. — J. Combinatorial Theory **2**, p. 422—430.
5. Andrews G. E. (1967c). Some new partition theorems. — J. Combinatorial Theory **2**, p. 431—436.
6. Andrews G. E. (1967d). A generalization of the Göllnitz—Gordon partition theorems. — Proc. Amer. Math. Soc. **18**, p. 945—952.
7. Andrews G. E. (1968a). On partition functions related to Schur's second partition theorem. — Proc. Amer. Math. Soc. **18**, p. 441—444.
8. Andrews G. E. (1968b). A new generalization of Schur's second partition theorem. — Acta Arith. **14**, p. 429—434.
9. Andrews G. E. (1968c). On  $q$ -difference equations for certain well-poised basic hyper-geometric series. — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **19**, p. 433—447.
10. Andrews G. E. (1969a). A general theorem on partitions with difference conditions. — Amer. J. Math. **91**, p. 18—24.
11. Andrews G. E. (1969b). A partition theorem of Göllnitz and related formulae. — J. Reine Angew. Math. **236**, p. 37—42.
12. Andrews G. E. (1969c). Some new partition theorems (II). — J. Combinatorial Theory **7**, p. 262—263.
13. Andrews G. E. (1969d). A generalization of the classical partition theorems. — Trans. Amer. Math. Soc. **145**, p. 205—221.

14. Andrews G. E. (1970). A polynomial identity which implies the Rogers—Ramanujan identities. — *Scripta Math.* **28**, p. 297—305.
15. Andrews G. E. (1971a). The use of computers in search of identities of the Rogers—Ramanujan type. — In: *Computers in Number Theory* (A. O. L. Atkin and B. J. Birch, eds.), Academic Press, London.
16. Andrews G. E. (1971b). On a theorem of Schur and Gleissburg. — *Arch. Math. (Basel)* **22**, p. 165—167.
17. Andrews G. E. (1971c). *Number Theory*. — Saunders, Philadelphia.
18. Andrews G. E. (1972). Partition identities. — *Advances in Math.* **9**, p. 10—51.
19. Andrews G. E. (1974a). A general theory of identities of the Rogers—Ramanujan type. — *Bull. Amer. Math. Soc.* **80**, p. 1033—1052.
20. Andrews G. E. (1974b). On the general Rogers—Ramanujan theorem. — *Mem. Amer. Math. Soc.* **152**.
21. Andrews G. E. (1974c). An analytic generalization of the Rogers—Ramanujan identities for odd moduli. — *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **71**, p. 4082—4085.
22. Andrews G. E. (1975a). On the Alder polynomials and a new generalization of the Rogers—Ramanujan identities. — *Trans. Amer. Math. Soc.* **204**, p. 40—64.
23. Andrews G. E. (1975b). Partially ordered sets and the Rogers—Ramanujan identities. — *Aequationes Math.* **12**, p. 94—107.
24. Andrews G. E. (1975c). On Rogers—Ramanujan type identities related to the modulus 11. — *Proc. London Math. Soc. (3)* **30**, p. 330—346.
25. Andrews G. E. (1975b). Problems and prospects for basic hypergeometric functions. — In: *The Theory and Applications of Special Functions* (R. Askey, ed.), Academic Press, New York.
26. Cheema M. S. (1969). Duality in the theory of partitions. — *Res. Bull. Panjab Univ.* **20**, p. 201—206.
27. Göllnitz H. (1967). Partitionen mit Differenzenbedingungen. — *J. reine angew. Math.* **225**, p. 154—190.
28. Gordon B. (1961). A combinatorial generalization of the Rogers—Ramanujan identities. — *Amer. J. Math.* **83**, p. 393—399.
29. Gordon B. (1965). Some continued fractions of the Rogers—Ramanujan type. — *Duke Math. J.* **31**, p. 741—748.
30. Gupta H. (1970). Partitions — a survey. — *J. Res. Nat. Bur. Standards* **74B**, p. 1—29.
31. Hardy G. H. (1940). *Ramanujan*. — Cambridge Univ. Press, London and New York; reprinted by Chelsea, New York.
32. Lehner J. (1941). A partition function associated with the modulus five. — *Duke Math. J.* **8**, p. 631—655.
33. LeVeque W. J. (1974). *Reviews in Number Theory*, Vol. 4. — Amer. Math. Soc., Providence, R. I.
34. Rogers L. J. (1894). Second memoir on the expansion of certain infinite products. — *Proc. London Math. Soc.* **25**, p. 318—343.
35. Rogers L. J. (1919). Proof of certain identities in combinatory analysis. — *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **19**, p. 211—214.
36. Schur I. J. (1917). Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie und zur Theorie der Kettenbrüche. — *S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Phys. — Math. Kl.*, p. 302—321. (Reprinted in I. Schur, *Gesammelte Abhandlungen*, Vol. 2, p. 117—136. Springer, Berlin, 1973).
37. Schur I. J. (1926). Zur additiven Zahlentheorie. — *S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Phys. — Math. Kl.*, p. 488—495. (Reprinted in I. Schur, *Gesammelte Abhandlungen*, Vol. 3, p. 43—50. Springer, Berlin, 1973.)
38. Selberg A. (1936). Über einige arithmetische Identitäten. — *Avhl. Norske Vid.* **8**, p. 23.

39. Singh V. N. (1957). Certain generalized hypergeometric identities of the Rogers—Ramanujan type. — *Pacific J. Math.* 7, p. 1011—1014.
40. Watson G. N. (1929). Theorems stated by Ramanujan (VII): Theorems on continued fractions. — *J. London Math. Soc.* 4, p. 39—48.
- 41\*. Bressoud D. M. (1980). Analytic and combinatorial generalizations of the Rogers—Ramanujan identities. — *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* 24, № 227.
- 42\*. Andrews G. E., Askey R. (1977). Enumeration of partitions: the role of Eulerian series and  $q$ -orthogonal polynomials. — In *Higher Combinatorics*, D. Reidel P. C., Dordrecht-Holland, p. 3—26. (Русский перевод: Эндрюс Дж. Е., Эски Р. Перечисление разбиений. — *Проблемы комбинаторного анализа в сер. «Математика»*, 1980, № 19, с. 101—119.)

## ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ТОЖДЕСТВ С РАЗБИЕНИЯМИ

### 8.1. Введение

Результаты гл. 7 наводят на мысль о том, что наличие общей теории тождеств, связанных с разбиениями (типа Роджерса — Рамануджана и Гёллиница — Гордона), способствовало бы более полному освещению этих привлекательных, хотя, видимо, и недостаточно мотивированных еще теорем. В этой главе мы рассмотрим основы общего подхода. Из дальнейшего проясняется, что имеется очень мало действительно удовлетворительных ответов на интересующие нас вопросы, в связи с чем нам подчас придется ограничиваться частичными ответами. По выявлении основной структуры таких задач в следующем параграфе, § 8.3, посвященном «идеалам разбиений порядка 1» — объекту, который достаточно прост в обращении и подсказывает типы ответов на интересующие нас вопросы из § 8.2. В заключительном параграфе оценивается широкий класс задач о разбиениях, в которых соответствующая производящая функция удовлетворяет некоторому линейному однородному  $q$ -разностному уравнению с полиномиальными коэффициентами. В некотором смысле этот заключительный параграф неудовлетворителен именно тем, что развитие общей теории  $q$ -разностных уравнений еще не обеспечило получения общих ответов на вопросы, относящиеся к тождествам и асимптотикам разбиений, однако имеющиеся теоремы § 8.5 наводят на мысль, что теория  $q$ -разностных уравнений действительно достойна своего дальнейшего развития.

### 8.2. Основания

Начнем с простого интуитивного замечания, которое и послужит базисом нашей дальнейшей работы. Во всех тождествах с разбиениями из гл. 7 (теорема 7.5, следствия 7.6 и 7.7 теорема 7.11) рассматриваемые в них функции разбиений перечисляют разбиения, лежащие в некотором подмножестве  $S$  множества всех разбиений. Например,  $S$  может быть множеством всех разбиений с разностями между частями, не меньшими чем 2 (см. следствие 7.6), или  $S$  может быть множеством всех разбиений с частями, сравнимыми с 1, 4, 7 (mod 8) (см. теорему 7.11 при  $k = i = 2$ ).

Интересно отметить, что все эти рассматриваемые подмножества разбиений  $C$  обладают тем свойством, что если  $\pi \in C$  и из  $\pi$  удаляется одна или несколько частей, то результирующее разбиение  $\pi'$  также принадлежит  $C$ .

Это замечание предопределяет введение частичного порядка на разбиениях по правилу:  $\pi' \leq \pi$  всякий раз, как каждое целое  $i$  присутствует в  $\pi$  не меньшее число раз, чем в  $\pi'$ .

**О п р е д е л е н и е 8.1.** Пусть  $\mathcal{P}$  обозначает множество всех последовательностей  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  из неотрицательных целых, в которых лишь конечное число  $f_i$  отлично от нуля.

Заметим, что каждая последовательность  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{f_i\}$  из  $\mathcal{P}$  соответствует (однозначно) разбиению  $(1^{f_1} 2^{f_2} 3^{f_3} 4^{f_4} \dots)$ .

**О п р е д е л е н и е 8.2.** Частичный порядок  $\leq$  на  $\mathcal{P}$  определяем по правилу  $\{f_i\} \leq \{g_i\}$ , где  $f_i \leq g_i$  для всех  $i$ .

Такое определение есть, очевидно, просто более четкая запись нашего словесного определения этого порядка, которое мы дали перед определением 8.1. Кроме того, множество  $\mathcal{P}$  вместе с этим порядком  $\leq$  в действительности образует решетку, в которой операции «пересечения»  $\cap$  и «объединения»  $\cup$  задаются по правилам  $\{f_i\} \cap \{g_i\} = \{\min(f_i, g_i)\}$ ,  $\{f_i\} \cup \{g_i\} = \{\max(f_i, g_i)\}$ .

**О п р е д е л е н и е 8.3.** Подмножество  $C \subset \mathcal{P}$ , обладающее тем свойством, что если  $\{f_i\} \in C$  и  $\{g_i\} \leq \{f_i\}$ , то с необходимостью  $\{g_i\} \in C$ , называется *идеалом разбиений*.

В терминах теории решеток такие  $C$  было бы естественно называть «полуидеалами» или «порядковыми идеалами».

**О п р е д е л е н и е 8.4.** Функцию  $\sigma$  определяем на каждом элементе множества  $\mathcal{P}$  как представляемое этим элементом число, т. е.

$$\sigma(\{f_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot i.$$

С точки зрения теории решеток  $\sigma$  представляет собой положительную норму на  $\mathcal{P}$  в том смысле, что

$$\sigma(\{f_i\} \cap \{g_i\}) + \sigma(\{f_i\} \cup \{g_i\}) = \sigma(\{f_i\}) + \sigma(\{g_i\}),$$

и если  $\{f_i\} > \{g_i\}$ , то  $\sigma(\{f_i\}) > \sigma(\{g_i\})$ .

**О п р е д е л е н и е 8.5.** Будем говорить, что два идеала разбиений  $C_1$  и  $C_2$  *эквивалентны*, и писать  $C_1 \sim C_2$ , если  $p(C_1, n) = p(C_2, n)$  для всех  $n$ .

После этой последовательности определений просмотрим их связь с результатами гл. 7. Во-первых, пусть

$$\mathcal{O} = \{\{f_i\} \in \mathcal{P} \mid f_i > 0 \Rightarrow i \text{ нечетно}\}, \quad (8.2.1)$$

$$\mathcal{D} = \{\{f_i\} \in \mathcal{P} \mid f_i \leq 1\}. \quad (8.2.2)$$

Тогда теорема Эйлера (следствие 1.2) утверждает, что

$$\mathcal{O} \sim \mathcal{D}, \quad (8.2.3)$$

поскольку  $p(\mathcal{O}, n)$  — число разбиений  $n$  на нечетные части, а  $p(\mathcal{D}, n)$  — число разбиений  $n$  на различные части.

Далее, пусть

$$\mathcal{B}_{k,a} = \{\{f_i\} \in \mathcal{P} \mid f_i + f_{i+1} \leq k-1, \quad f_1 \leq a-1\}, \quad (8.2.4)$$

$$\mathcal{A}_{k,a} = \{\{f_i\} \in \mathcal{P} \mid f_i > 0 \Rightarrow i \neq 0, \quad \pm a \pmod{2k+1}\}. \quad (8.2.5)$$

Тогда обобщение Гордона тождеств Роджерса — Рамануджана эквивалентно тому, что

$$\mathcal{A}_{k,a} \sim \mathcal{B}_{k,a}, \quad 1 \leq a \leq k. \quad (8.2.6)$$

Наконец, если

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{k,a} = \{\{f_i\} \in \mathcal{P} \mid f_i + f_{i+1} \leq k-1, \quad f_{2i} + f_{2i+1} + f_{2i+2} \leq \\ \leq k-1, \quad f_i > 1 \Rightarrow i \text{ четно}, \quad f_1 + f_2 \leq a-1\}, \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{k,a} = \{\{f_i\} \in \mathcal{P} \mid f_i > 0 \Rightarrow i \not\equiv 2 \pmod{4} \text{ и} \\ i \not\equiv 0, \quad \pm(2a-1) \pmod{4k}\}, \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

то обобщение тождеств Гёллиница — Гордона в теореме 7.11 утверждает, что

$$\mathcal{C}_{k,a} \sim \mathcal{D}_{k,a}, \quad 1 \leq a \leq k. \quad (8.2.9)$$

То, что  $\mathcal{A}_{k,a}$ ,  $\mathcal{B}_{k,a}$ ,  $\mathcal{C}_{k,a}$ ,  $\mathcal{D}_{k,a}$  — идеалы разбиений, вытекает из их определений, однако установление равенств  $p(\mathcal{B}_{k,a}, n) = B_{k,a}(n)$  и  $p(\mathcal{D}_{k,a}, n) = D_{k,a}(n)$  требует уже некоторых вычислений. По этому поводу заметим лишь, что если  $(b_1 b_2 \dots b_s)$  — разбиение  $n$  с частями  $b_j \geq b_{j+1}$ ,  $b_j - b_{j+k-1} \geq 2$ , то такие разбиения характеризуются тем фактом, что для всякого  $i$  полное число вхождений  $i$  и  $i+1$  (т. е. число  $f_i + f_{i+1}$ ) в разбиения не превосходит  $k-1$ ; в противном случае, если  $b_j$  выбрать как первое  $i$ , для которого это не выполняется, получили бы, что  $b_j - b_{j+k-1} \leq 1$ .

Поскольку отношение эквивалентности из определения 8.5 может быть использовано для адекватного описания результатов гл. 7, мы приходим к следующему общему вопросу.

**Основная задача.** Полностью охарактеризовать классы эквивалентности идеалов разбиений.

Мы умышленно сформулировали эту задачу в столь общей форме. Минимальный удовлетворительный ответ представлял бы собой достаточно быстро работающий алгоритм, устанавливающий эквивалентность двух идеалов разбиений. К сожалению, мы не в состоянии пробить броню этой задачи, однако в следующем параграфе будет рассматриваться более частная постановка, для которой уже будет получено соответствующее решение (теорема 8.4).

### 8.3. Идеалы разбиений порядка 1

Основу предыдущего параграфа составляло замечание о том, что разбиениям из задач гл. 7 присущ некий порядок. Обратимся теперь к «локальным» свойствам, проявляющимся в этих задачах. Для установления принадлежности  $\{f_i\} \in \mathcal{A}_{k,a}$  требуется произвести последовательность лишь «одинокных» проверок условия  $f_i > 0 \Rightarrow i \equiv 0, \pm a \pmod{2k+1}$ , в то время как установление принадлежности  $\{f_i\} \in \mathcal{B}_{k,a}$  требует уже последовательности проверок соседних пар  $f_i, f_{i+1}$  на исполнимость условия  $f_i + f_{i+1} \leq k-1$ , конечно, по исполнению начального условия  $f_1 \leq a-1$ . Определение 8.6 дает представление о том, сколько тщательно надо проверять  $\{f_i\} \in \mathcal{P}$  для выяснения  $\{f_i\} \in C$ .

**О п р е д е л е н и е 8.6.** Будем говорить, что идеал разбиений  $C$  имеет *порядок*  $k$ , если  $k$  — наименьшее положительное натуральное число, при котором всякий раз, как  $\{f_i\} \notin C$ , найдется  $m$  такое, что  $\{f_i\} \notin C$ , где

$$f'_i = \begin{cases} f_i, & \text{если } i = m, m+1, \dots, m+k-1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Относительно идеалов из § 8.2 сразу замечаем, что  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{A}_{k,a}$  и  $\mathcal{E}_{k,a}$  — идеалы порядка 1, тогда как  $\mathcal{B}_{k,a}$  — порядка 2, а  $\mathcal{D}_{k,a}$  — порядка 3. Ввиду того, что теорема Эйлера (следствие 1.2) устанавливает эквивалентность двух идеалов разбиений порядка 1, резонно задаться следующим общим вопросом.

**З а д а ч а.** Полностью охарактеризовать классы эквивалентности идеалов разбиений порядка 1.

Мы завершим этот параграф вполне удовлетворительным решением этой задачи.

**Т е о р е м а 8.1.** Пусть  $C$  — идеал разбиений. Тогда  $C$  имеет порядок 1 тогда и только тогда, когда существуют  $d_1, d_2, d_3, \dots$  такие, что

$$C = \{\{f_i\} \in \mathcal{P} \mid f_i \leq d_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots\}, \quad (8.3.1)$$

где каждое  $d_i$  — неотрицательное целое либо  $+\infty$ .

**З а м е ч а н и е.** По завершении доказательства теоремы 8.1 мы увидим, что каждое  $d_j$  определяется по правилу  $d_j = \sup_{\{f_i\} \in C} f_j$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\bar{C}$  обозначает множество разбиений правой части равенства (8.3.1). Ясно, что такое множество является идеалом разбиений порядка 1, поскольку это, очевидно, идеал разбиений, и если  $\{f_i\} \notin \bar{C}$ , то существует такое  $j$ , что  $f_j > d_j$  для некоторого  $j$ , и поэтому  $\{f_i\} \notin \bar{C}$ , где  $f'_i = 0$ , если  $i \neq j$  и  $f'_j = f_j$ .

С другой стороны, предположим, что  $C$  имеет порядок 1; положим тогда  $d_j = \sup_{\{f_i\} \in C} f_j$ . При таком определении  $C$

ясно, что  $C \subset \bar{C}$  обратно, если  $\{f_i\} \notin C$  тогда существует  $j$  такое, что  $\{f'_i\} \notin C$ , где  $f'_i = 0$ , если  $i \neq j$  и  $f'_j = f_j$ . Утверждается, что  $f_j > d_j$ ; действительно, при неисполнении этого видим, что согласно определению  $d_j$  должны найтись такие  $\{h_i\} \in C$ , что  $f_j \leq h_j \leq d_j$ , и, значит,  $\{f'_i\} \leq \{h_i\} \in C$ , а это влекло бы  $\{f'_i\} \in C$ , что, конечно, невозможно. Таким образом, поскольку  $f_j > d_j$ , видим, что  $\{f_i\} \notin \bar{C}$  и, стало быть,  $C = \bar{C}$ .

Следующий результат показывает, что идеалы разбиений порядка 1 имеют большой алгебраический смысл.

**Теорема 8.2.** Идеалы  $\mathcal{P}$  — это идеалы разбиений порядка 1.

**Доказательство.** Напомним операции пересечения и объединения в  $\mathcal{P}$ :

$$\{f_i\} \cap \{g_i\} = \{\min(f_i, g_i)\},$$

$$\{f_i\} \cup \{g_i\} = \{\max(f_i, g_i)\};$$

напомним также, что идеал  $S$  в  $\mathcal{P}$  — это просто идеал разбиений, замкнутый относительно операции объединения.

Предположим, что  $S$  — идеал в  $\mathcal{P}$ , т. е.  $S$  — это некоторый идеал разбиений. Определим  $d_j = \sup_{\{f_i\} \in S} f_j$  и положим

$$\bar{S} = \{\{f_i\} \in \mathcal{P} \mid f_i \leq d, \quad i = 1, 2, \dots\}.$$

Ясно, что  $S \subset \bar{S}$ . Если теперь  $\{f_i\} \in \bar{S}$ , то мы можем определить  $\{f_i^{(j)}\}$ , полагая  $f_i^{(j)} = 0$ , если  $i \neq j$ , и  $f_i^{(j)} = f_j$ , и мы замечаем, что  $\{f_i\} = \{f_i^{(1)}\} \cup \{f_i^{(2)}\} \cup \dots \cup \{f_i^{(N)}\}$ , где  $N$  — выбирается так, что  $f_i = 0$  для всех  $i > N$ . Заметим далее, что согласно определению  $d_j$  для каждого  $j$  найдется  $\{h_i\} \in S$ ,  $f_j \leq h_j \leq d_j$ . Следовательно,  $\{f_i^{(j)}\} \leq \{h_i\} \in S$  и, значит,  $\{f_i^{(j)}\} \in S$  для каждого  $j$ . Стало быть, и  $\{f_i\} = \{f_i^{(1)}\} \cup \{f_i^{(2)}\} \cup \dots \cup \{f_i^{(N)}\}$  принадлежит  $S$ , поскольку  $S$  — идеал в  $\mathcal{P}$ . Поэтому  $\bar{S} = S$  и, значит, согласно теореме 8.1 множество  $S$  образует идеал разбиений порядка 1.

Обратная импликация тривиальна. Если  $C$  — идеал разбиений порядка 1, то по теореме 8.1

$$C = \{\{f_i\} \in \mathcal{P} \mid f_i \leq d_i, \quad i = 1, 2, \dots\}$$

Поэтому, если  $\{f_i\} \in C$  и  $\{g_i\} \in C$ , то  $\{f_i\} \cup \{g_i\} = \{\max(f_i, g_i)\}$  и, значит,  $C$  — идеал в  $\mathcal{P}$ .

Наш следующий результат обеспечивает весьма удобное представление производящей функции для  $P(C, n)$ , где  $C$  — идеал разбиений порядка 1.

**Теорема 8.3.** Пусть  $C$  — идеал разбиений порядка 1 с  $d_j = \sup_{\{f_i\} \in C} f_j$ . Тогда

$$\sum_{n \geq 0} p(C, n) q^n = \prod_{\substack{j=1 \\ d_j < \infty}}^{\infty} (1 - q^{d_j+1}) \left( \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j) \right)^{-1}.$$



**Доказательство.** Согласно теореме 8.1 величина  $p(C, n)$  есть в точности число разбиений  $n$ , в которых каждое целое  $i$  входит не более чем  $d_i$  раз. Поэтому (как и при доказательстве теоремы 1.1) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq 0} p(C, n) q^n &= \\ &= \prod_{\substack{j=1 \\ d_j < \infty}}^{\infty} (1 + q^j + q^{2j} + \dots + q^{d_j j}) \prod_{\substack{j=1 \\ d_j = \infty}}^{\infty} (1 + q^j + q^{2j} + q^{3j} + \dots) = \\ &= \prod_{\substack{j=1 \\ d_j < \infty}}^{\infty} \frac{(1 - q^{j(d_j+1)})}{(1 - q^j)} \prod_{\substack{j=1 \\ d_j = \infty}}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^j)} = \\ &= \prod_{\substack{j=1 \\ d_j < \infty}}^{\infty} (1 - q^{j(d_j+1)}) \left( \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Этот последний результат обеспечивает получение относительно простого теста для определения эквивалентности двух идеалов разбиений порядка 1, который можно понимать как «минимальное» решение поставленной в начале этого параграфа задачи.

**Теорема 8.4.** Пусть  $C$  и  $C'$  — идеалы разбиений порядка 1 с  $d_j = \sup_{\{f_i\} \in C} f_i$ ,  $d'_j = \sup_{\{f_i\} \in C'} f_i$ . Тогда  $C \sim C'$  в том и только том случае, когда две последовательности положительных целых  $\{j(d_j + 1)\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $d_j < \infty$ ,  $\{j(d'_j + 1)\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $d'_j < \infty$ , отличаются порядком одна от другой.

**З а м е ч а н и е.** Эту теорему можно перефразировать в терминах мультимножеств (объекта, введенного в § 3.4): мультимножество  $M$  — это пара  $(S, f)$ , где  $S$  — множество, а  $f$  — функция на  $S$  с целыми положительными значениями. Для каждого  $a \in S$  величина  $f(a)$  выражает «кратность  $a$  в  $M$ ». Теперь каждая из последовательностей  $\{j(d_j + 1)\}$ ,  $\{j(d'_j + 1)\}$  однозначно определяет соответствующее мультимножество  $D$  (соответственно  $D'$ ), где, скажем,  $D = (\Delta, \delta)$ ,  $\Delta$  — множество положительных целых вида  $j(d_j + 1)$  для некоторого  $j$ , а  $\delta(r)$  — функция кратностей, которая подсчитывает число вхождений  $r$  в последовательность  $\{j(d_j + 1)\}$ . Теорема 8.4 просто утверждает, что  $C \sim C'$  тогда и только тогда, когда  $D = D'$ .

**Доказательство.** Если пара последовательностей из условия теоремы такова, что одна переупорядочивается в другую,

то по теореме 8.3

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} p(C, n) q^n &= \prod_{\substack{j=1 \\ d_j < \infty}}^{\infty} (1 - q^{(d_j+1)}) \left( \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j) \right)^{-1} = \\ &= \prod_{\substack{j=1 \\ d'_j < \infty}}^{\infty} (1 - q^{(d'_j+1)}) \left( \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j) \right)^{-1} = \sum_{n \geq 0} p(C', n) q^n. \end{aligned}$$

Поэтому  $p(C, n) = p(C', n)$  для всех  $n$  и, значит,  $C \sim C'$ .

Предположим теперь, что эти последовательности непереупорядочиваемы друг в друга. Пусть  $\delta(r)$  (соответственно  $\delta'(r)$ ) обозначает то число раз, которые  $r$  входит в  $\{j(d_j + 1)\}$  (соответственно в  $\{j(d'_j + 1)\}$ ), и пусть  $h$  — то наименьшее целое, при котором  $\delta(h) \neq \delta'(h)$ . Если теперь предположим, что  $C \sim C'$ , то

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{\delta(j)} \left( \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j) \right)^{-1} &= \sum_{n \geq 0} p(C, n) q^n = \\ &= \sum_{n \geq 0} p(C', n) q^n = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{\delta'(j)} \left( \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j) \right)^{-1} \end{aligned}$$

и, значит,

$$\prod_{j=h}^{\infty} (1 - q^j)^{\delta(j)} = \prod_{j=h}^{\infty} (1 - q^j)^{\delta'(j)},$$

а это неосуществимо, поскольку коэффициент при  $q^h$  в левой части есть  $-\delta(h)$ , который не равен  $-\delta'(h)$  — коэффициенту при  $q^h$  в правой части. Это противоречие показывает, что  $C$  и  $C'$  не эквивалентны.

Громадное число теорем о разбиениях легко следуют из теоремы 8.4. Выпишем здесь лишь некоторые из них.

**С л е д с т в и е 8.5.** Пусть  $P_1(n)$  обозначает число разбиений  $n$ , в которых каждое целое  $i$  встречается не более чем  $i - 1$  раз. Пусть  $P_2(n)$  обозначает число разбиений  $n$  на не квадраты. Тогда  $P_1(n) = P_2(n)$  при всех  $n$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $C_1 = \{\{f_i\} \in \mathcal{P} \mid f_i \leq i - 1\}$  и  $C_2 = \{\{f_i\} \in \mathcal{P} \mid f_i > 0 = i - \text{не квадрат}\}$ . Тогда равенство  $P_1(n) = P_2(n)$  равносильно эквивалентности  $C_1 \sim C_2$ . Для множества  $C_1$  соответствующая последовательность  $\{j(d_j + 1)\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $d_j < \infty$ , имеет вид  $\{j(j - 1 + 1)\}_{j=1}^{\infty} = \{j^2\}_{j=1}^{\infty}$ ; для  $C_2$  такая последовательность имеет вид  $\{j^2(0 + 1)\}_{j=1}^{\infty} = \{j^2\}_{j=1}^{\infty}$ . Поэтому согласно теореме 8.4 имеем  $C_1 \sim C_2$ .

**С л е д с т в и е 8.6.** Пусть  $M_1$  и  $M_2$  — два множества положительных целых, и пусть  $2M_1$  обозначает удвоение элементов  $M_1$  (т. е.  $2M_1 = \{j \mid j/2 \in M_1\}$ ). Тогда число разбиений  $n$  на различ-

ные части, взятые из  $M_1$ , равно числу разбиений  $n$  на части, взятые из  $M_2$ , тогда и только тогда, когда  $2M_1 \subseteq M_1$  и  $M_2 = M_1 - 2M_1$ .

**Доказательство.** Пусть  $C_1 = \{\{f_i\} \in \mathcal{P} \mid f_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, f_i = 1 \Rightarrow i \in M_1\}$ , и пусть  $C_2 = \{\{f_i\} \in \mathcal{P} \mid f_i > 0 \Rightarrow f_i \in M_2\}$ . Тогда нам достаточно показать, что  $C_1 \sim C_2 \Leftrightarrow 2M_1 \subseteq M_1$  и  $M_2 = M_1 - 2M_1$ . Последовательность  $\{j(d_j + 1)\}_{j=1}^\infty$ ,  $d_j < \infty$ , связанная с  $C_1$ , состоит из  $\{j \cdot 2\}_{j=1}^\infty$ ,  $j \in M_1$ , и  $\{j\}_{j=1}^\infty$ ,  $j \notin M_1$ , тогда как последовательность, связанная с  $C_2$ , состоит из  $\{j\}_{j=1}^\infty$ ,  $j \notin M_2$ ; эти два мультимножества совпадают тогда и только тогда, когда  $2M_1 \cap M_1^c = \emptyset$  (в противном случае в  $C_1$ -мультимножестве присутствовали бы и двукратные вхождения, а в  $C_2$ -мультимножестве — лишь однократные) и  $2M_1 \cup M_1^c = M_2^c$ . Поэтому, по теореме 8.4, эквивалентность  $C_1 \sim C_2$  имеет место тогда и только тогда, когда  $2M_1 \subset M_1$  и  $M_2 = M_1 - 2M_1$ .

**Следствие 8.7.** Каждое целое однозначно представимо суммой различных степеней двойки.

**Доказательство.** Пусть  $M_1 = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$  и  $M_2 = \{1\}$ . Тогда  $2M_1 = \{2, 4, 8, 16, \dots\} \subset M_1$  и  $M_2 = M_1 - 2M_1$ . Поэтому согласно следствию 8.6 число разбиений  $n$  на различные части из  $M_1$  равно числу разбиений  $n$  на части из  $M_2$ , которое есть в точности 1, поскольку имеется лишь единственное разбиение  $n$  на единичные части.

#### 8.4. Сцепленные идеалы разбиений

Материал предшествующего параграфа обеспечивает хороший подход к исследованию вопросов о классах эквивалентности идеалов разбиений. К сожалению, мощность результатов, подобных теореме 8.3, падает, когда речь заходит об идеалах разбиений неединичного порядка. Тем не менее в этом параграфе мы укажем широкий класс идеалов разбиений (сцепленные идеалы разбиений) с производящими функциями от двух переменных, и функции эти оказываются решениями конечных линейных однородных  $q$ -разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами. В этот класс сцепленных идеалов разбиений входят и  $\mathcal{B}_{k,k}$  и  $\mathcal{D}_{k,k}$  из гл. 7, впрочем, как и большинство идеалов разбиений, проявляющихся в известных тождествах с разбиениями, он включает в себя идеалы разбиений порядка 1 тогда и только тогда, когда последовательность из локальных супремумов  $\{d_i\}_{i=1}^\infty$  периодична по некоторому модулю  $k$  и  $d_i < \infty$  при всяком  $i$ . Адекватная трактовка идеалов разбиений порядка 1 представлена в § 8.3, так что наиболее интересные приложения сцепленных идеалов разбиений проявляются, когда идеал имеет порядок 2 или более.

В этом параграфе с каждым идеалом разбиений  $C$  будет связываться производящая функция двух переменных

$$f_C(x; q) = \sum_{\{f_i\} \in C} x^{\sum f_i} q^{\sum f_i i} = \sum_{\{f_i\} \in C} x^{\#(\{f_i\})} q^{\sigma(\{f_i\})}, \quad (8.4.1)$$

где показатель при  $x$  есть число частей разбиения  $(1^{f_1} 2^{f_2} \dots)$ , а показатель при  $q$  — само разбиваемое число. Заметим, что

$$f_C(1; q) = \sum_{\{f_i\} \in C} q^{\sigma(\{f_i\})} = \sum_{n=0}^{\infty} p(C, n) q^n. \quad (8.4.2)$$

Помимо того, нетрудно показать (соображениями, используемыми в теореме 1.1), что

$$f_{\mathcal{P}}(x; q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - xq^n)^{-1} \quad (8.4.3)$$

и произведение абсолютно сходится при  $|q| < 1$ ,  $|x| < |q|^{-1}$ . Поэтому, так как число разбиений  $n$  с  $m$  частями в произвольном идеале разбиений  $C$ , очевидно, не превосходит полного их числа в  $\mathcal{P}$ , посредством сравнительного признака сходимости видим (применяя (8.4.3) к (8.4.1)), что ряд в (8.4.1) абсолютно сходится при  $|q| < 1$ ,  $|x| < |q|^{-1}$ .

$Q$ -разностные уравнения, такие как (7.1.1) и (7.2.4), играли важную роль в гл. 7. Теперь нужно уяснить специфику задач, в которых появляются  $q$ -разностные уравнения, а также специфику соответствующих идеалов разбиений. Первым важным свойством оказывается существование модуля.

**О п р е д е л е н и е 8.7.** Пусть  $C$  — идеал разбиений; положим

$$C^{(m)} = \{\{f_i\} \in C \mid f_1 = f_2 = \dots = f_m = 0\}.$$

Таким образом,  $C^{(m)}$  — это множество разбиений из  $C$ , все части которых больше, чем  $m$ .

**О п р е д е л е н и е 8.8.** Через  $\varphi$  обозначаем взаимно однозначное соответствие  $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^{(1)}$ , определяемое по правилу  $\varphi(\{f_i\}) = \{g_i\}$ , где

$$g_i = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ f_{i-1}, & i > 1. \end{cases}$$

Ясно, что функция  $\varphi$  просто добавляет 1 к каждой части разбиения; поэтому

$$\sigma(\varphi\{f_i\}) = \sum_{i=2}^{\infty} i f_{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) f_i,$$

так что если  $i$  присутствовало  $f_i$  раз, то теперь  $i+1$  присутствует  $f_i$  раз.

**О п р е д е л е н и е 8.9** Число  $m$  называется *модулем* идеала разбиений  $C$ , если  $m$  — наименьшее положительное целое, для которого  $\varphi^m C = C^{(m)}$ .

Многие идеалы разбиений не имеют модулей (например,  $C_1$  и  $C_2$  из доказательства следствия 8.5). Идеал разбиений  $\mathcal{O}$  из (8.2.1) имеет модуль 2;  $\mathcal{D}$  из (8.2.2) имеет модуль 1;  $\mathcal{R}_{k,a}$  из (8.2.4) имеет модуль 1;  $\mathcal{A}_{k,a}$  из (8.2.5) имеет модуль  $2k+1$ ;  $\mathcal{D}_{k,a}$  из (8.2.7) имеет модуль 2, а  $\mathcal{C}_{k,a}$  из (8.2.8) имеет модуль  $4k$ .

Соотношение между модулями и  $q$ -разностными уравнениями устанавливает следующая

**Л е м м а 8.8.** Если идеал разбиений  $C$  имеет модуль  $m$ , то  $f_C(xq^m; q) = f_{C^{(m)}}(x; q)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**

$$\begin{aligned} f_C(xq^m; q) &= \sum_{\{f_i\} \in C} x^{\#(\{f_i\})} q^{m\#(\{f_i\}) + \sigma(\{f_i\})} = \\ &= \sum_{\{f_i\} \in C} x^{\#(\varphi^m(\{f_i\}))} q^{\sigma(\varphi^m(\{f_i\}))} = \sum_{\{f_i\} \in \varphi^m C} x^{\#(\{f_i\})} q^{\sigma(\{f_i\})} = \\ &= \sum_{\{f_i\} \in C^{(m)}} x^{\#(\{f_i\})} q^{\sigma(\{f_i\})} = f_{C^{(m)}}(x; q). \end{aligned}$$

**О п р е д е л е н и е 8.10.** Для каждого идеала разбиений  $C$  модуля  $m$  положим

$$L_C = \{\{f_i\} \in C \mid f_i = 0, \quad i > m\}.$$

Таким образом,  $L_C$  — это подидеал  $C$ , состоящий из всех разбиений  $C$ , части которых не превосходят  $m$ .

**О п р е д е л е н и е 8.11.** Для  $\{f_i\}$  и  $\{g_i\}$  из  $\mathcal{P}$  положим  $\{f_i\} \oplus \{g_i\} = \{f_i + g_i\}$ .

**Л е м м а 8.9.** Если  $C$  — идеал разбиений с модулем  $m$ , то для каждого  $\pi \in C$  существует единственная последовательность  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \dots$  из элементов  $L_C$  такая, что

$$\pi = \pi_1 \oplus (\varphi^m \pi_2) \oplus (\varphi^{2m} \pi_3) \oplus (\varphi^{3m} \pi_4) \oplus \dots \quad (8.4.4)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Так как  $C$  имеет модуль  $m$ , то  $\varphi^m C = C^{(m)}$  для каждого  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Это следует из того, что  $\varphi^m: C \rightarrow C^{(m)}$  — биекция и, значит,  $\varphi C^{(m)}$  должно содержать те элементы  $\{f_i\}$  из  $C$ , у которых  $f_1 = f_2 = \dots = f_{2m} = 0$ , т. е.  $\varphi^m C^{(m)} = C^{(2m)}$  и, следовательно,  $\varphi^{2m} C = \varphi^m \varphi^m C = \varphi^m C^{(m)} = C^{(2m)}$ . Доказательство для произвольного  $j$  аналогично.

Теперь для произвольного  $\pi = \{f_i\}$  однозначно имеем

$$\begin{aligned} \pi &= \{f_1, f_2, \dots, f_m, 0, 0, 0, \dots\} + \\ &+ \{0, 0, \dots, 0, f_{m+1}, f_{m+2}, \dots, f_{2m}, 0, 0, \dots\} + \end{aligned}$$

$$+ \{0, 0, \dots, 0, f_{2m+1}, f_{2m+2}, \dots, f_{3m}, 0, 0, \dots\} + \dots = \\ = \pi_1 \oplus (\varphi^m \pi_2) \oplus (\varphi^{2m} \pi_3) \oplus \dots,$$

где

$$\pi_j = \{g_i\}_{i=1}^\infty, \\ g_i = \begin{cases} f_{jm+i}, & i = 1, 2, \dots, m, \\ 0, & i > m. \end{cases}$$

Для завершения доказательства остается показать, что если  $C$  имеет модуль  $m$  и  $\pi \in C$ , то каждое  $\pi_j \in L_C$ . Ясно, что  $\varphi^{(j-1)m} \pi_j \leq \pi \in C$ ; поэтому  $\varphi^{(j-1)m} \pi_j \in C$ . Но  $\varphi^{(j-1)m} C = C^{((j-1)m)}$ . Стало быть, поскольку  $\varphi^{(j-1)m} \pi_j \in C^{((j-1)m)} = \varphi^{(j-1)m} C$ , видим, что  $\pi_j \in C$  и, значит,  $\pi_j \in L_C$ .

**О п р е д е л е н и е 8.12.**  $C$  называется *сцепленным (связанным) идеалом разбиений*, если

- 1)  $C$  имеет модуль, скажем,  $m$ ;
- 2)  $L_C$  — конечное множество;
- 3) каждому  $\pi_a \in L_C$  соответствуют некоторое подмножество  $\mathcal{L}_C(\pi_a)$  из  $L_C$  (связующее множество для  $\pi_a$ ) и положительное целое  $l(\pi_a)$  (*размах (разброс)* этого  $\pi_a$ ) такие, что для всякого  $\pi \in \mathcal{P}$  включение  $\pi \in C$  выполняется тогда и только тогда, когда представление (8.4.4) обладает тем свойством, что для каждого  $j$

$$\pi_{j+1}, \pi_{j+2}, \dots, \pi_{j+l(\pi_j)-1} = \{0, 0, 0, \dots\}, \quad \pi_{j+l(\pi_j)} \in \mathcal{L}_C(\pi_j).$$

Поскольку это определение довольно громоздко, рассмотрим несколько примеров. Из (8.2.4) имеем

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_{k,k} = \{\{f_i\} \in \mathcal{P} \mid f_i + f_{i+1} \leq k - 1\}.$$

Здесь  $\mathcal{B}$  имеет модуль 1, и если взять  $\pi_i = \{i, 0, 0, \dots\}$ , то

$$L_{\mathcal{B}} = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{k-1}\}, \quad l(\pi_i) = 1, \quad 0 \leq i \leq k-1, \\ \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\pi_i) = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{k-i-1}\}, \quad 0 \leq i \leq k-1.$$

Из (8.2.2) видим, что  $\mathcal{D}$  имеет модуль 1, и если  $\pi_i = \{i, 0, 0, 0, \dots\}$ , то  $L = \{\pi_0, \pi_1\}$ ,  $l(\pi_0) = l(\pi_1) = 1$ ,  $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\pi_0) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\pi_1) = \{\pi_0, \pi_1\}$ .

Из (8.2.7) ясно, что  $\mathcal{D}_{k,k} = \mathcal{D}^*$  имеет модуль 2, и если  $\pi_i = \{0, i, 0, 0, \dots\}$ ,  $\psi_i = \{1, i, 0, 0, \dots\}$ , то

$$L_{\mathcal{D}^*} = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{k-1}, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{k-2}\}, \\ l(\pi_i) = l(\psi_i) = l(\pi_{k-1}) = 1, \quad i = 0, 1, \dots, k-2, \\ \mathcal{L}_{\mathcal{D}^*}(\psi_i) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}^*}(\pi_i) = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{k-i-1}, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{k-i-2}\}.$$

Если связующее множество  $\mathcal{L}_C(\pi) = \{\pi_0\}$  и  $l(\pi) = r$ , то в действительности имеется и иная возможность выбора разброса

и связующего множества, именно,  $\mathcal{L}_C(\pi) = L_G$  и  $l(\pi) = r + 1$ ; вообще, первый вариант предпочтительнее в том смысле, что он реализует наименьшее возможное значение разброса.

Отметим, что при  $1 \leq a < k$  ни  $\mathcal{B}_{k,a}$ , ни  $\mathcal{D}_{k,a}$  не является сцепленными идеалами разбиений, однако, как это станет ясно из дальнейшего, они существенно связаны с  $\mathcal{B}_{k,k}$  и  $\mathcal{D}_{k,k}$ .

**О п р е д е л е н и е 8.13.** Пусть  $C$  — сцепленный идеал разбиений и  $\bar{\pi} \in L_C$ ; определим  $C_{\bar{\pi}}$  как подмножество из  $C$ , состоящее из всех тех  $\pi \in C$ , для которых в представлении (8.4.4)  $\pi_1 = \bar{\pi}$ .

Таким образом, для  $1 \leq i < k$

$$\mathcal{B}_{\pi_i} = \pi_i \oplus \varphi \mathcal{B}_{k,k-i},$$

$$\mathcal{D}_{\pi_i}^* = \pi_i \oplus \varphi^2 \mathcal{D}_{k,k-i},$$

$$\mathcal{D}_{\psi_i}^* = \psi_i \oplus \varphi^2 \mathcal{D}_{k,k-i}.$$

Мы увидим, сколь важную роль играет  $C_{\bar{\pi}}$  в основной теореме о сцепленных идеалах разбиений (теорема 8.11). Решающим в доказательстве теоремы 8.11 будет следующий результат, который представляет собой модификацию к  $q$ -разностным уравнениям одного алгоритма Муррея и Миллера (1954) для соответствующей задачи о дифференциальных уравнениях.

**Л е м м а 8.10.** *Предположим, что имеется система  $q$ -разностных уравнений*

$$y_j(xq^m) = \sum_{k=1}^n p_{jk}(x) y_k(x), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (8.4.5)_j$$

*выполняющаяся для  $|q| < 1$ ,  $|x| < |q|^{-1}$ , где  $y_j(x)$  — функции, аналитичные по  $x$  и  $q$  внутри этой области, а  $p_{jk}(x)$  — рациональные функции по  $x$  и  $q$ . Тогда существует такое  $r \leq n$ , что*

$$\sum_{k=0}^r \bar{p}_k(x) y_1(xq^{km}) = 0, \quad (8.4.6)$$

*где  $\bar{p}_k(x)$  — рациональные функции от  $x$  и  $q$  и  $\bar{p}_r(x) = 1$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В ходе этого доказательства будем заменять рациональные функции, скажем,  $p_{jk}(x)$  на новые рациональные функции, скажем,  $p_{jk}^*(x)$ , в связи с чем постоянно изменению обозначений (и тем самым необходимостью работы с обозначениями типа  $p_{jk}^{*+\#1}(x)$ ) мы предпочитаем запись новых функций, так же как старых  $p_{jk}(x)$ ; поэтому читатель должен внимательно следить за тем, что  $p_{jk}(x)$  в одной строке может означать нечто иное, чем  $p_{jk}^*(x)$  в следующей.

Начнем с рассмотрения (8.4.5) <sub>$j$</sub> :

$$y_1(xq^m) = p_{11}(x) y_1(x) + p_{12}(x) y_2(x) + \dots + p_{1n}(x) y_n(x).$$

Либо все  $p_{12}(x), \dots, p_{1n}(x)$  тождественно равны нулю, либо нет, и тогда имеем (8.4.6) при  $r = 1$ . Если же они не тождественны нулю, мы можем (посредством подходящей перенумерации  $y_2(x), \dots, y_n(x)$ ) предположить, что  $p_{12}(x)$  не тождественна нулю. Положим

$$w_2(x) = p_{12}(x) y_2(x) + \dots + p_{1n}(x) y_n(x) \quad (8.4.7)$$

и теперь можем выделить  $y_2(x)$  из нашей системы уравнений:

$$y_2(x) = (w_2(x) - p_{13}(x) y_3(x) - \dots - p_{1n}(x) y_n(x)) / p_{12}(x). \quad (8.4.8)$$

Новая система имеет вид

$$y_1(xq^m) = p_{11}(x) y_1(x) + w_2(x),$$

$$\begin{aligned} w_2(xq^m) &= \sum_{k=2}^n p_{1k}(xq^m) y_k(xq^m) = \\ &= \sum_{k=2}^n p_{1k}(xq^m) \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l(x) = \\ &= \sum_{l=1}^n y_l(x) \sum_{k=2}^n p_{1k}(xq^m) p_{kl}(x) + \\ &+ \frac{1}{p_{12}(x)} \left( \sum_{k=2}^n p_{1k}(xq^m) p_{k2}(x) \right) (w_2(x) - p_{13}(x) y_3(x) - \\ &\quad - \dots - p_{1n}(x) y_n(x)), \quad (8.4.9)_1 \end{aligned}$$

и, следуя нашему, ранее сформулированному соглашению, запишем

$$\begin{aligned} w_2(xq^m) &= p_{21}(x) y_1(x) + p_{22}(x) w_2(x) + \\ &+ p_{23}(x) y_3(x) + \dots + p_{2n}(x) y_n(x). \quad (8.4.9)_2 \end{aligned}$$

После подстановки (8.4.8) в (8.4.5)<sub>j</sub> при  $3 \leq j \leq n$  видим, что получающиеся уравнения вновь принимают ту же самую форму, именно,

$$\begin{aligned} y_j(xq^m) &= p_{j1}(x) y_1(x) + p_{j2}(x) w_2(x) + \\ &+ \sum_{k=3}^n p_{jk}(x) y_k(x), \quad 3 \leq j \leq n. \quad (8.4.9)_j \end{aligned}$$

Эта процедура может быть повторена:

$$w_3(x) = p_{23}(x) y_3(x) + \dots + p_{2n}(x) y_n(x). \quad (8.4.10)$$

Если все  $p_{23}(x), \dots, p_{2n}(x)$  — тождественные нули, то (8.4.9)<sub>1</sub> и (8.4.9)<sub>2</sub> влекут

$$\begin{aligned} y_1(xq^{2m}) - p_{11}(xq^m) y_1(xq^m) &= \\ &= p_{21}(x) y_1(x) + p_{22}(x) (y_1(xq^m) - p_{11}(x) y_1(x)), \end{aligned}$$





Следующий шаг дает

$$y_1(xq^{3m}) + \alpha(x)y_1(xq^{2m}) + \beta(x)y_1(xq^m) + \gamma(x)y_1(x) = w_4(x)$$

и так далее. Наконец, выделение  $w_r(x)$  влечет, как это и предполагалось, (8.4.6).

**Т е о р е м а 8.11.** Пусть  $C$  — сцепленный идеал разбиений. Тогда

$$f_C(x; q) = \sum_{\{f_i\} \in C} x^{\sum f_i} q^{\sum f_i \cdot i}$$

удовлетворяет конечному линейному однородному  $q$ -разностному уравнению с коэффициентами — полиномами от  $x$  и  $q$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Начнем с нумерации элементов  $L_C$ :  $L_C = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\}$ , а поскольку для всех  $C \in \{0, 0, 0, \dots\} \in L_C$ , можем принять, что  $\pi_0 = \{0, 0, 0, \dots\}$ . Сразу оговоримся, что  $\pi_i$  — отнюдь не то же самое  $\pi_i$ , что фигурировало в примерах, предшествующих этой теореме.

Для  $0 \leq i \leq k$  положим

$$H_i(x) = H_i(x, q) = \sum_{\pi \in C_{\pi_i}} x^{\#(\pi)} q^{\sigma(\pi)}. \quad (8.4.11)$$

Теперь, поскольку  $\pi_0 = \{0, 0, 0, \dots\}$ , это немедленно влечет, что  $C_{\pi_0} = C^{(m)} = q^m C$ . Поэтому по лемме 8.8

$$H_0(x) = \sum_{\pi \in C_{\pi_0}} x^{\#(\pi)} q^{\sigma(\pi)} = \sum_{\pi \in C^{(m)}} x^{\#(\pi)} q^{\sigma(\pi)} = f_C(xq^m; q). \quad (8.4.12)$$

Стало быть, надобно лишь доказать, что  $H_0(x)$  удовлетворяет линейному однородному  $q$ -разностному уравнению с полиномиальными коэффициентами, поскольку тогда (8.4.12) автоматически повлечет то же самое и для  $f_C(x; q)$ .

Наша ближайшая цель в этом доказательстве состоит в доказательстве того, что  $H_i(x)$  удовлетворяет системе линейных однородных  $q$ -разностных уравнений, для чего замечаем, что если  $\pi \in C_{\pi_i}$ , то согласно части 3 определения 8.11

$$\pi = \pi_i \oplus \underbrace{\pi_0 \oplus \pi_0 \oplus \dots \oplus \pi_0}_{l(\pi_i)-1} \oplus \phi^l(\pi_i)^m \pi',$$

где

$$\pi' \in C_{\pi_{j_1}} \cup C_{\pi_{j_2}} \cup C_{\pi_{j_3}} \cup \dots \cup C_{\pi_{j_r}}$$

и  $\mathcal{L}_Q(\pi_i) = \{\pi_{j_1}, \pi_{j_2}, \pi_{j_3}, \dots, \pi_{j_r}\}$ . Очевидно, что  $C_{\pi_{j_1}}, C_{\pi_{j_2}}, \dots, C_{\pi_{j_r}}$  суть непересекающиеся множества разбиений. Поэтому

для  $0 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
 H_i(x) &= \sum_{\pi \in C_{\pi l}} x^{\#(\pi)} q^{\sigma(\pi)} = \\
 &= \sum_{\pi' \in C_{\pi j_1} \cup \dots \cup C_{\pi j_r}} x^{\#(\pi_i)} q^{\sigma(\pi_i)} x^{\#(\varphi^l(\pi_i)^m \pi')} q^{\sigma(\varphi^l(\pi_i)^m \pi')} = \\
 &= x^{\#(\pi_i)} q^{\sigma(\pi_i)} \sum_{h=1}^r \sum_{\pi' \in C_{\pi j_h}} x^{\#(\pi')} q^{l(\pi_i)^m \#(\pi') + \sigma(\pi')} = \\
 &= x^{\#(\pi_i)} q^{\sigma(\pi_i)} \sum_{h=1}^r H_{j_h}(x q^{l(\pi_i)^m}). \quad (8.4.13)
 \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы надо лишь показать, что эта система  $q$ -разностных уравнений может быть сведена к одному уравнению с  $H_0(x)$ , а это потребует применения леммы 8.10.

Положим

$$h_{ij}(x) = H_i(x^{-1}q^{-jm}), \quad 0 \leq i \leq k, \quad 0 \leq j < l(\pi_i). \quad (8.4.14)$$

Система (8.4.13), как это легко видеть, эквивалентна следующей системе из  $\Omega = l(\pi_0) + l(\pi_1) + \dots + l(\pi_k)$  уравнений:

$$\begin{aligned}
 h_{ij}(xq^m) &= h_{i, j+1}(x), \quad 0 \leq i \leq k, \quad 0 \leq j < l(\pi_i) - 1, \\
 h_{i, l(\pi_i)-1}(xq^m) &= x^{-\#(\pi_i)} q^{\sigma(\pi_i) - ml(\pi_i) \#(\pi_i)} \sum_{h=1}^r h_{jh, 0}(x). \quad (8.4.15)
 \end{aligned}$$

Таким образом, согласно лемме 8.10  $h_{00}(x) = H_0(x^{-1})$  удовлетворяет

$$\sum_{k=0}^{\Omega} \bar{p}_k(x) H_0(x^{-1}q^{-km}) = 0.$$

Поэтому

$$0 = \sum_{k=0}^{\Omega} \bar{p}_k(x^{-1}q^{-\Omega m}) H_0(xq^{(\Omega-k)m}). \quad (8.4.16)$$

Кроме того, можно предполагать, что  $\bar{p}_k(x^{-1}q^{-\Omega m})$  суть полиномы от  $x$  и  $q$ ; поэтому мы можем избавиться от знаменателей домножением (8.4.16) на подходящим образом подобранные множители. Согласно замечанию, следующему за равенством (8.4.12), видим, что установление (8.4.16) достаточно для доказательства теоремы 8.11.

### Задачи

1. Для каждого  $k \geq 2$  всякое целое имеет единственное представление по основанию  $k$ , т. е. каждое целое однозначно представимо как сумма степеней  $k$ , в которой нет части, повторяемой более чем  $k-1$  раз.

2. Совершенное разбиение числа  $n$  — это такое разбиение  $\pi = (\lambda_1 \dots \lambda_s)$ , что для каждого  $m \leq n$  существует в точности одно  $\pi' \leq \pi$  такое, что  $\pi'$  — это разбиение  $m$ . Число совершенных разбиений — то же самое, что и число упорядоченных факторизаций числа  $n+1$ . Чтобы убедиться в этом, заметим, что все совершенные разбиения  $n$  представимы в форме

$$(1^{g_1-1} g_1^{g_2-1} (g_1 g_2)^{g_3-1} \dots (g_1 g_2 \dots g_{k-1})^{g_k-1});$$

поэтому

$$n = (g_1 - 1) \cdot 1 + (g_2 - 1) \cdot g_1 + (g_3 - 1) \cdot g_1 g_2 + \dots + \\ + (g_k - 1) \cdot (g_1 g_2 \dots g_{k-1}) = g_1 g_2 \dots g_k - 1.$$

3. Мак-Магон, который ввел совершенные разбиения, обобщил это понятие до разбиения бесконечности, под которым он понимал формальное выражение

$$\pi_\infty = (1^{g_1-1} g_1^{g_2-1} (g_1 g_2)^{g_3-1} \dots (g_1 g_2 \dots g_{k-1})^{g_k-1} \dots),$$

определенное для каждой последовательности  $\{g_i\}_{i=1}^\infty$  целых, превосходящих 1. Из задачи 2 ясно, что для каждого целого  $n$  существует единственное  $\pi < \pi_\infty$  такое, что  $\pi$  — это разбиение  $n$ . Простое рассуждение показывает, что если  $\mathcal{M}$  — класс эквивалентности идеалов порядка 1, содержащий  $\{\{f_i\} \mid f_i = 0, i > 1\}$ , то

$$p(\mathcal{M}; n) = 1 \quad \text{для всех } n$$

каждое «разбиение бесконечности» есть по существу идеал разбиений в  $\mathcal{M}$ .

4. Постоянная последовательность  $\{g_i\}_{i=1}^\infty$  с  $g_i = k \geq 2$  дает разбиение бесконечности (или элементов  $\mathcal{M}$ ), как в задаче 1.

5. Достаточно просто показать, что каждое целое однозначно представимо в виде суммы из непоследовательных чисел Фибоначчи (числа Фибоначчи: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... ( $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ ) ...). Это показывает, что не каждый элемент  $\mathcal{M}$  соответствует разбиению бесконечности.

6. Пусть  $\mathcal{D}(r; b_1, b_2, \dots, b_m; m)$  — множество всех разбиений  $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s)$  ( $s$  произвольно) таких, что  $\lambda_{i-r} - \lambda_i \geq b_j$  ( $r < i \leq s$ ),  $\lambda_i \equiv j \pmod{m}$ . Тогда  $\mathcal{D}(r; b_1, \dots, b_m; m)$  — сцепленный идеал разбиений.

7. Пусть  $\mathcal{E}$  — множество всех разбиений  $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s)$  ( $s$  произвольно) таких, что  $\lambda_{i-1} - \lambda_i \geq 9$  ( $1 < i \leq s$ ), если  $\lambda_i$  нечетно;  $\lambda_{i-2} - \lambda_i \geq 5$  ( $2 < i \leq s$ ), если  $\lambda_i \equiv 2 \pmod{4}$  и  $\lambda_{i-2} - \lambda_i \geq 0$  ( $2 < i \leq s$ ) всегда. Тогда  $\mathcal{E}$  — это сцепленный идеал разбиений. Модуль  $\mathcal{E}$  равен 4. Множество  $L_{\mathcal{E}}$  имеет 9 элементов:

$$\pi_0 = \{0, 0, 0, 0, 0, \dots\}, \quad \pi_1 = \{1, 0, 0, 0, 0, \dots\}, \quad \pi_2 = \{0, 0, 1, 0, 0, \dots\}, \\ \pi_3 = \{0, 1, 1, 0, 0, \dots\}, \quad \pi_4 = \{0, 1, 0, 1, 0, \dots\}, \quad \pi_5 = \{0, 2, 0, 0, 0, \dots\}, \\ \pi_6 = \{0, 1, 0, 0, 0, \dots\}, \quad \pi_7 = \{0, 0, 0, 1, 0, \dots\}, \quad \pi_8 = \{0, 0, 0, 2, 0, \dots\}.$$

Размах  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  равен 2, в то время как остальные  $\pi_i$  имеют размах 1.

Множествами сцеплений являются

$$\mathcal{L}\mathcal{G}(\pi_0) = L\mathcal{G},$$

$$\mathcal{L}\mathcal{G}(\pi_1) = L\mathcal{G} - \{\pi_1\},$$

$$\mathcal{L}\mathcal{G}(\pi_2) = \{\pi_7, \pi_8\} = \mathcal{L}\mathcal{G}(\pi_3),$$

$$\mathcal{L}\mathcal{G}(\pi_4) = \{\pi_2, \pi_7, \pi_8\} = \mathcal{L}\mathcal{G}(\pi_5),$$

$$\mathcal{L}\mathcal{G}(\pi_6) = L\mathcal{G} = \mathcal{L}\mathcal{G}(\pi_7) = \mathcal{L}\mathcal{G}(\pi_8).$$

### З а м е ч а н и я

Материал, представленный здесь, первоначально был опубликован в [4, 5, 6]. Такое представление сцепленных идеалов разбиений есть расширение и усиление [5] и впервые изложено было в такой форме в лекциях в Университете Эрлангена в 1975 году. Пара множеств из следствия 8.6 называется *эйлеровой*; этот результат первоначально получен в [2] и расширен в [14]. Литературу по материалу этой главы см. в разделе P68 в [8].

Задача 1 — это теорема античности о представлениях в системах счисления (по поводу такой ее трактовки см. [1, 2]); задачи 2—4 — [9, 10, 12]; задача 5 — это теорема Зекендорфа. Подробнее см. [7].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Andrews G. E. (1969a). On radix representation and the Euclidean algorithm. — Amer. Math. Monthly **76**, p. 66—68.
2. Andrews G. E. (1969b). Two theorems of Euler and a general partition theorem. — Proc. Amer. Math. Soc. **20**, p. 499—502.
3. Andrews G. E. (1971). Number Theory. — Saunders, Philadelphia.
4. Andrews G. E. (1972). Partition identities. — Advances in Math. **9**, p. 10—51.
5. Andrews G. E. (1974). A general theory of identities of the Rogers—Ramanujan type. Bull. Amer. Math. Soc. **80**, p. 1033—1052.
6. Andrews G. E. (1975). Problems and prospects for basic hypergeometric functions. — In: Theory and Application of Special Functions (R. Askey, ed.), Academic Press, New York.
7. Daykin D. E. (1960). Representations of natural numbers as sums of generalized Fibonacci numbers. — J. London Math. Soc. **35**, p. 143—160.
8. LeVeque W. J. (1974). Reviews in Number Theory, Vol. 4. — Amer. Math. Soc., Providence, R. I.
9. MacMahon P. A. (1886). Certain special partitions of numbers. — Quart. J. Math. Oxford. Ser. **21**, p. 367—373.
10. MacMahon P. A. (1891). The theory of perfect partitions and the compositions of multipartite numbers. — Messenger of Math. **20**, p. 103—119.
11. MacMahon P. A. (1915). Combinatory Analysis, Vol. 1. — Cambridge Univ. Press, London and New York (reprinted by Chelsea, New York, 1960).
12. MacMahon P. A. (1923). The partitions of infinity with some arithmetic and algebraic consequences. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **21**, p. 642—650.
13. Miller K. S., Murray F. J. (1954). Existence Theorems for Ordinary Differential Equations. — New York Univ. Press, New York.
14. Subbarao M. V. (1971). Partition theorems for Euler pairs. — Proc. Amer. Math. Soc. **28**, p. 330—336.

## МЕТОДЫ РЕШЕТА, СВЯЗАННЫЕ С РАЗБИЕНИЯМИ

### 9.1. Введение

До сих пор тождества с функциями разбиений получались либо установлением взаимно однозначного соответствия между множествами перечисляемых разбиений (например, теоремы 1.4—1.6), либо посредством установления подходящих тождеств с соответствующими производящими функциями (например, теоремы 7.5 и 7.11). В этой главе мы продемонстрируем, как при посредстве различных типов принципа включения-исключения (или решета) можно доказывать многие интересные результаты теории разбиений. В § 9.2 с использованием принципа включения-исключения передоказывается теорема Эйлера (следствие 1.2) и выводится тождество Сильвестра. В § 9.3 изучается необычное решето, связанное с последовательными рангами разбиения Аткина, и доказывается новое тождество (теорема 9.12) с числами  $A_{k,i}(n)$  из теоремы 7.5. Это решето приводит к ряду открытых вопросов о разбиениях.

### 9.2. Включение-исключение

Начнем с передоказательства следствия 1.2 чисто комбинаторными методами.

**Теорема 9.1** (см. следствие 1.2). *Для всех  $n$*

$$p(\mathcal{D}, n) = p(\mathcal{O}, n).$$

**Доказательство.** Восстановим основное рассуждение в доказательстве следствия 1.2:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p(\mathcal{D}, n) q^n &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^n} = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} p(\mathcal{O}, n) q^n. \end{aligned}$$

Ключ к нашему подходу лежит в комбинаторной интерпретации произведения  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{2n}}{1-q^n}$ . Именно, положим

$$E(n) = \sum_{\substack{a_1 > \dots > a_r \\ b_1 \geq \dots \geq b_s}} (-1)^r,$$

где суммирование ведется по всем представлениям  $n$  вида

$$\begin{aligned} n &= a_1 + \dots + a_r + b_1 + \dots + b_s, \\ a_1 &> \dots > a_r, \quad b_1 \geq \dots \geq b_s, \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

в которых каждое  $a_i$  четно. Всякое обычное разбиение  $\pi = (C_1 C_2 \dots C_t)$  можно перегруппировать для получения представлений вида (9.2.1). Если  $m$  — число различных четных  $C_i$ , то вклад  $\pi$  в  $E(n)$  в точности равен

$$\begin{aligned} 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} &= \\ &= \begin{cases} 1, & m = 0, \\ (1-1)^m = 0, & m > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,  $\pi$  дает 1, если все его части нечетны, и 0 в противном случае. Стало быть,

$$E(n) = p(\mathcal{O}, n).$$

Далее заметим, что поскольку каждое  $a_i$  из (9.2.1) четно, то, полагая  $a_i = 2\alpha_i$ , получаем, что представление (9.2.1) эквивалентно представлению

$$\begin{aligned} n &= \alpha_1 + \dots + \alpha_r + \alpha_1 + \dots + \alpha_r + b_1 + \dots + b_s, \\ \alpha_1 &> \dots > \alpha_r, \quad b_1 \geq \dots \geq b_s. \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

Теперь всякое обычное разбиение  $\pi = (C_1 C_2 \dots C_t)$  можно перегруппировать для получения представлений в форме (9.2.2). И здесь, если  $m$  — число частей, входящих в  $\pi$ , с повторениями, то вклад  $\pi$  в  $E(n)$  в точности равен

$$\begin{aligned} 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} &= \\ &= \begin{cases} 1, & m = 0, \\ (1-1)^m = 0, & m > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,  $\pi$  дает 1, если все его части различны, и 0 в противном случае. Поэтому

$$E(n) = p(\mathcal{D}, n).$$

Таким образом,  $p(\mathcal{O}, n) = p(\mathcal{D}, n) (= E(n))$ , что и требовалось доказать.

Используемое здесь рассуждение можно легко распространить и на другие результаты, такие, например, как следствие 8.6. Для получения нашего следующего результата привлекается усеченный принцип включения-исключения.

**Т е о р е м а 9.2** (Сильвестр).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n q^{n^2 (3n+1)/2} (1 - xq^{2n+1})}{(q)_n (xq^{n+1})_{\infty}} = 1. \quad (9.2.3)$$

**З а м е ч а н и е.** Теорема 9.2 сразу следует из результатов гл. 7. Действительно, левая часть в (9.2.3) есть в точности  $J_{11}(0; x; q)$ , и, значит, согласно лемме 7.2  $J_{11}(0; x; q) = J_{11}(0; xq; q)$ . Поэтому

$$J_{11}(0; x; q) = J_{11}(0; xq^N; q) \rightarrow J_{11}(0; 0; q) = 1, \quad N \rightarrow \infty.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Будем рассматривать левую часть (9.2.3) как производящую функцию для

$$C(M, N) = \sum_{\substack{\pi \\ \#(\pi) = M \\ \sigma(\pi) = N}} \alpha_{\pi}$$

и определим весовой коэффициент  $\alpha_{\pi}$ .

Левую часть (9.2.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n q^{n^2} \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q)_n} \cdot \frac{1}{(xq^{n+1})_{\infty}} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n+1} q^{(n+1)^2} \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q)_n} \cdot \frac{1}{(xq^{n+1})_{\infty}}, \quad (9.2.4) \end{aligned}$$

а подход, применяемый в комбинаторном доказательстве равенства (2.2.9) в конце гл. 2, показывает, что  $x^n q^{n^2} q^{n(n+1)/2} / (q)_n$  является производящей функцией для всех разбиений с  $n$  различными частями, превосходящими  $n$ . Поэтому

$$x^n q^{n^2} \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q)_n} \cdot \frac{1}{(xq^{n+1})_{\infty}}$$

порождает представления целых  $N$  в форме

$$N = a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + \dots + b_s, \quad (9.2.5)$$

где  $a_1 > a_2 > \dots > a_n > n$ ,  $b_1 \geq \dots \geq b_s > n$ , а  $s$  произвольно.



Теперь каждое обычное разбиение  $\pi$ , наименьшая часть которого равна  $m$  и которое содержит  $t$  различных целых, можно разбивать на представления вида (9.2.5) различными способами, просто выделяя подмножество объема  $n$  из  $t$  возможных выборов для  $a_i$ . Поэтому множитель  $(-1)^n$  в первой сумме из (9.2.4) означает, что полный вклад  $\pi$  в первую сумму равен

$$1 - \binom{t}{1} + \binom{t}{2} - \dots + (-1)^{m-1} \binom{t}{m-1} = (-1)^{m-1} \binom{t-1}{m-1}.$$

Вторая сумма в (9.2.4) подобна первой, за тем лишь исключением, что теперь представления  $N$  имеют вид

$$N = a_1 + a_2 + \dots + a_n + (n+1) + b_1 + \dots + b_s, \quad (9.2.6)$$

где  $a_1 > a_2 > \dots > a_n > n+1$ ,  $b_1 \geq \dots \geq b_s > n$ , а  $s$  произвольно.

В этом случае всякое обычное разбиение  $\pi$  с  $t$  различными целыми и наименьшей частью  $m$  (некоторые или все из этих  $t$  целых могут присутствовать в  $\pi$  с повторениями) можно разбивать на представления (9.2.6); при условии, что  $m = n+1$ , для  $a_i$  может быть осуществимо

$$\binom{t-1}{n} = \binom{t-1}{m-1}$$

выборов. Поэтому  $\pi$  дает вклад только к члену второй суммы в (9.2.4) при  $n = m-1$  и этот вклад равен  $(-1)^m \binom{t-1}{m-1}$ . Поэтому полный вклад разбиения  $\pi$  с наименьшей частью  $m$  равен

$$1 - \binom{t}{1} + \binom{t}{2} - \dots + (-1)^{m-1} \binom{t-1}{m-1} + (-1)^m \binom{t-1}{m-1} = 0.$$

Значит, для

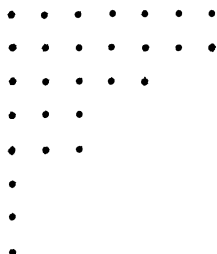
$$C(M, N) = \sum_{\substack{\pi \\ \#(\pi) = M \\ \sigma(\pi) = N}} \alpha_\pi$$

видим, что весовой коэффициент  $\alpha_\pi$  равен нулю, если  $\pi$  имеет наименьшую часть  $m$ . Таким образом, единственным разбиением, имеющим положительный весовой коэффициент, оказывается пустое разбиение нуля; его весовой коэффициент, очевидно, равен 1. Стало быть,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n q^{n(3n+1)/2} (1 - xq^{2n+1})}{(q)_n (xq^{n+1})_{\infty}} &= \\ &= \sum_{M \geq 0, N \geq 0} C(M, N) x^M q^N = C(0, 0) = 1. \end{aligned}$$

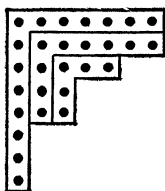
### 9.3. Решето для последовательных рангов

Как известно, любое разбиение может быть представлено графом Феррера. Например, разбиение  $(7\ 7\ 5\ 3\ 3\ 1\ 1\ 1)$  имеет представление



В 1944 году Дайсоном было введено понятие ранга разбиения как его наибольшей части минус число всех частей разбиения. Таким образом, ранг разбиения из нашего примера равен  $7 - 8 = -1$ .

Позже Аткином было введено понятие последовательных рангов разбиения. Можно рассматривать графическое представление как множество углов, заполненных точками, так что наше разбиение  $(7\ 7\ 5\ 3\ 3\ 1\ 1\ 1)$  имеет три таких угла:



Для разбиения  $\pi$  определим  $r_i(\pi)$  как число точек в горизонтальной части  $i$ -го угла минус число точек в вертикальной части  $i$ -го угла в таком рассмотрении графического представления разбиения  $\pi$ . Таким образом, если  $\pi = (7\ 7\ 5\ 3\ 3\ 1\ 1\ 1)$ , то  $r_1(\pi) = 7 - 8 = -1$ ,  $r_2(\pi) = 6 - 4 = 2$ ,  $r_3(\pi) = 3 - 3 = 0$ .

Для нас представляет интерес «осцилляция» этих рангов между положительной и отрицательной границами.

**О п р е д е л е н и е 9.1.** Пусть  $h$  — наибольшее целое, при котором существует последовательность  $j_1 < j_2 < \dots < j_h$  такая, что

$$r_{j_1}(\pi) > 2k - i - 1, \quad r_{j_2}(\pi) \leq -(i - 1), \quad r_{j_3}(\pi) > 2k - i - 1, \\ r_{j_4}(\pi) \leq -(i - 1)$$

и так далее. Это число  $h$  будем называть  $(k, i)$ -положительной осцилляцией разбиения  $\pi$ .

**О п р е д е л е н и е 9.2.** Пусть  $g$  — то наибольшее целое, при котором существует последовательность  $j_1 < j_2 < \dots < j_g$  такая, что

$$r_{j_1}(\pi) \leq -(i-1), \quad r_{j_2}(\pi) > 2k-i-1,$$

$$r_{j_3}(\pi) \leq -(i-1), \quad r_{j_4}(\pi) > 2k-i-1$$

и так далее. Это число  $g$  будем называть  $(k, i)$ -отрицательной осцилляцией разбиения  $\pi$ .

Если  $\pi = (7\ 7\ 5\ 3\ 3\ 1\ 1\ 1)$ , то  $(1, 1)$ -положительная осцилляция  $\pi$  равна 2, а  $(2, 1)$ -отрицательная осцилляция  $\pi$  равна 1.

Наше внимание сосредоточивается на функциях разбиений, связанных с такими осцилляциями.

**О п р е д е л е н и е 9.3.** Пусть  $p_{k,i}(a, b; \mu; N)$  (соответственно  $m_{k,i}(a, b; \mu; N)$ ) обозначает число разбиений  $N$  не более чем с  $b$  частями, не превосходящими  $a$ , у которых  $(k, i)$ -положительная (соответственно  $(k, i)$ -отрицательная) осцилляция не меньше  $\mu$ .

Этим функциям разбиений можно поставить в соответствие производящие функции

$$P_{k,i}(a, b; \mu; q) = \sum_{N \geq 0} p_{k,i}(a, b; \mu; N) q^N, \quad (9.3.1)$$

$$M_{k,i}(a, b; \mu; q) = \sum_{N \geq 0} m_{k,i}(a, b; \mu; N) q^N. \quad (9.3.2)$$

Далее мы опишем рекуррентные соотношения для этих функций, которые приведут нас к тождествам, содержащим многочлены Гаусса, но сначала отметим тесную связь между отрицательной и положительной осцилляциями.

**Л е м м а 9.3.** Для всякого разбиения  $\pi$  его  $(k, i)$ -положительная осцилляция либо на 1 больше, либо на 1 меньше, чем его  $(k, i)$ -отрицательная осцилляция.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $j_1 < j_2 < \dots < j_h$  — последовательность, связанная с  $(k, i)$ -положительной осцилляцией, как в определении 9.1. Тогда либо существует  $j_0 < j_1$  такое, что  $r_{j_0}(\pi) \leq -(i-1)$ , либо нет. В первом случае видим, что  $(k, i)$ -отрицательная осцилляция больше на 1, а во втором случае меньше на 1.

**Л е м м а 9.4.** При каждом  $\mu \geq 1$  выполняются следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} & m_{k,i}(a, b; \mu; N) - m_{k,i}(a-1, b; \mu; N) - \\ & - m_{k,i}(a, b-1; \mu; N) + m_{k,i}(a-1, b-1; \mu; N) = \\ & = \begin{cases} m_{k,i}(a-1, b-1; \mu; N-a-b+1), & a-b > -(i-1), \\ p_{k,i}(a-1, b-1; \mu-1; N-a-b+1), & a-b \leq -(i-1); \end{cases} \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

$$\begin{aligned}
& p_{k,i}(a, b; \mu; N) - p_{k,i}(a-1, b; \mu; N) - \\
& \quad - p_{k,i}(a, b-1; \mu; N) + p_{k,i}(a-1, b-1; \mu; N) = \\
& = \begin{cases} m_{k,i}(a-1, b-1; \mu-1; N-a-b+1), & a-b \geq 2k-i-1, \\ p_{k,i}(a-1, b-1; \mu; N-a-b+1), & a-b \leq 2k-i-1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{9.3.4}$$

**Доказательство.** Начнем с анализа левой части (9.3.3). Разность  $m_{k,i}(a, b; \mu; N) - m_{k,i}(a-1, b; \mu; N)$  обозначает число разбиений  $N$  не более чем с  $b$  частями, из которых максимальная равна  $a$ , и с  $(k, i)$ -отрицательной осцилляцией, не меньшей  $\mu$ . Стало быть, вся левая часть (9.3.3):

$$\begin{aligned}
& (m_{k,i}(a, b; \mu; N) - m_{k,i}(a-1, b; \mu; N)) - \\
& \quad - (m_{k,i}(a, b-1; \mu; N) - m_{k,i}(a-1, b-1; \mu; N))
\end{aligned}$$

обозначает число разбиений  $N$  с  $b$  частями, из которых наибольшая равна  $a$ , и с  $(k, i)$ -отрицательной осцилляцией, не меньшей  $\mu$ .

Преобразуем теперь разбиения, перечисляемые левой частью (9.3.3), следующим образом: удалим из каждого такого разбиения его наибольшую часть (т. е.  $a$ ) и уменьшим на единицу каждую из оставшихся частей этого разбиения. В терминах графического представления это, очевидно, эквивалентно удалению первого (наружного) угла из графа Феррера. Таким образом, преобразованное разбиение представляет собой разбиение числа  $N - a - b + 1$  не более чем на  $b-1$  блоков, не превосходящих  $a-1$ .

Если  $a - b > -(i-1)$ , то удаление наружного угла из графического представления не влияет на  $(k, i)$ -отрицательную осцилляцию, которая остается равной  $\mu$ . Следовательно, преобразованное разбиение принадлежит типу разбиений, перечисляемых функцией  $m_{k,i}(a-1, b-1; \mu; N-a-b+1)$ . А поскольку описанная процедура, очевидно, обратима, видим, что если  $a - b > -(i-1)$ , то

$$\begin{aligned}
& m_{k,i}(a, b; \mu; N) - m_{k,i}(a-1, b; \mu; N) - \\
& \quad - m_{k,i}(a, b-1; \mu; N) + m_{k,i}(a-1, b-1; \mu; N) = \\
& \quad = m_{k,i}(a-1, b-1; \mu; N-a-b+1).
\end{aligned}$$

Стало быть, первая половина (9.3.3) доказана.

Предположим теперь обратное:  $a - b \leq -(i-1)$ ; в этом случае удаление внешнего угла из графического представления уже оказывает воздействие на  $(k, i)$ -отрицательную осцилляцию. Именно, результирующее разбиение характеризуется тем фактом, что оно имеет  $(k, i)$ -положительную осцилляцию, не меньшую  $\mu - 1$ . Таким образом, преобразованное разбиение принадлежит типу разбиений, перечисляемых  $p_{k,i}(a-1, b-1; \mu-1; N-a-b+1)$ .

$N - a - b + 1$ ). И вновь, пользуясь обратимостью нашего преобразования, получаем, что если  $a - b \leq -(i - 1)$ , то

$$\begin{aligned} m_{k,i}(a, b; \mu; N) - m_{k,i}(a - 1, b; \mu; N) - \\ - m_{k,i}(a, b - 1; \mu; N) + m_{k,i}(a - 1, b - 1; \mu; N) = \\ = p_{k,i}(a - 1, b - 1; \mu - 1; N - a - b + 1). \end{aligned}$$

Тем самым установлена и вторая половина равенства (9.3.3).

Мы опускаем доказательство (9.3.3), поскольку оно в точности повторяет доказательство (9.3.3) при перемене ролей  $(k, i)$ -положительной и  $(k, i)$ -отрицательной осцилляций.

Теперь довольно легко перевести лемму 9.4 на язык производящих функций.

**С л е д с т в и е 9.5.** Если  $\mu \geq 1$ , то

$$\begin{aligned} M_{k,i}(a, b; \mu; q) - M_{k,i}(a - 1, b; \mu; q) - \\ - M_{k,i}(a, b - 1; \mu; q) + M_{k,i}(a - 1, b - 1; \mu; q) = \\ = q^{a+b-1} \begin{cases} M_{k,i}(a - 1, b - 1; \mu; q), & a - b > -(i - 1), \\ P_{k,i}(a - 1, b - 1; \mu - 1; q), & a - b \leq -(i - 1); \end{cases} \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

$$\begin{aligned} P_{k,i}(a, b; \mu; q) - P_{k,i}(a - 1, b; \mu; q) - \\ - P_{k,i}(a, b - 1; \mu; q) + P_{k,i}(a - 1, b - 1; \mu; q) = \\ = q^{a+b-1} \begin{cases} M_{k,i}(a - 1, b - 1; \mu - 1; q), & a - b > 2k - i - 1, \\ P_{k,i}(a - 1, b - 1; \mu; q), & a - b \leq 2k - i - 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.3.6)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Приравнивая коэффициенты при  $q^N$  в этих тождествах, получаем требуемое непосредственно из леммы 9.4.

**Л е м м а 9.6.** Выполняются следующие равенства:

$$P_{k,i}(a, b; 0; q) = M_{k,i}(a, b; 0; q) = \left[ \begin{matrix} a+b \\ a \end{matrix} \right], \quad (9.3.7)$$

$$\begin{aligned} P_{k,i}(0, b; \mu; q) = P_{k,i}(a, 0; \mu; q) = M_{k,i}(0, b; \mu; q) = \\ = M_{k,i}(a, 0; \mu; q) = 0, \quad \mu \geq 1, \end{aligned} \quad (9.3.8)$$

где  $\left[ \begin{matrix} a+b \\ a \end{matrix} \right]$  — многочлен Гаусса (см. § 3.2).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для доказательства (9.3.7) заметим, что у всех разбиений  $(k, i)$ -положительная и  $(k, i)$ -отрицательная осцилляции не меньше нуля; поэтому  $P_{k,i}(a, b; 0; q)$  и  $M_{k,i}(a, b; 0; q)$  — это производящие функции для разбиений не

более чем с  $b$  частями, не превосходящими  $a$ . Согласно теореме 3.1 такая производящая функция имеет вид  $\left[ a + b \atop a \right]$ , что и доказывает (9.3.7).

Для (9.3.8) заметим, что только пустое разбиение нуля не имеет ни частей, ни наибольшей части. А поскольку все  $(k, i)$ -осцилляции пустого разбиения нуля равны нулю, то видим, что производящие функции из (9.3.8) должны быть тождественно равны нулю.

**Л е м м а 9.7.**

$$q^L \left[ \begin{matrix} A+B \\ B-X \end{matrix} \right] - q^L \left[ \begin{matrix} A+B-1 \\ B-X \end{matrix} \right] - q^L \left[ \begin{matrix} A+B-1 \\ B-X-1 \end{matrix} \right] + \\ + q^L \left[ \begin{matrix} A+B-2 \\ B-X-1 \end{matrix} \right] = q^{A+B-1} q^L \left[ \begin{matrix} A+B-2 \\ B-X-1 \end{matrix} \right].$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно (3.3.3) имеем

$$q^L \left[ \begin{matrix} A+B \\ B-X \end{matrix} \right] - q^L \left[ \begin{matrix} A+B-1 \\ B-X \end{matrix} \right] - q^L \left[ \begin{matrix} A+B-1 \\ B-X-1 \end{matrix} \right] + q^L \left[ \begin{matrix} A+B-2 \\ B-X-1 \end{matrix} \right] = \\ = q^{L+A+X} \left[ \begin{matrix} A+B-1 \\ B-X-1 \end{matrix} \right] - q^{L+A+X} \left[ \begin{matrix} A+B-2 \\ B-X-2 \end{matrix} \right] \stackrel{(3.3.4)}{=} \\ = q^{L+A+B-1} \left[ \begin{matrix} A+B-2 \\ B-X-1 \end{matrix} \right].$$

**Л е м м а 9.8.** Для каждого целого  $r \geq 0$  положим

$$f(A; r; X, Y, L) = q^L \frac{(1 - q^{(r+1)(A+Y+1)})}{(1 - q^{A+Y+1})} \left[ \begin{matrix} 2A+X \\ A+Y \end{matrix} \right] + \\ + \sum_{j=0}^{r-2} q^{L+A+Y+j+2} \frac{(1 - q^{(r-j-1)(A+Y+1)})}{(1 - q^{A+Y+1})} \left[ \begin{matrix} 2A+X+j \\ A+Y-1 \end{matrix} \right].$$

Тогда для каждого целого  $r \geq 1$

$$f(A, r; X, Y, L) - f(A, r-1; X, Y, L) - \\ - f(A-1, r+1; X, Y, L) + f(A-1, r; X, Y, L) = \\ = q^{L+2A+2Y+r} \left[ \begin{matrix} 2A+X+r-2 \\ A+Y \end{matrix} \right].$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**

$$f(A, r; X, Y, L) - f(A, r-1; X, Y, L) = \\ = q^{L+r(A+Y+1)} \left[ \begin{matrix} 2A+X \\ A+Y \end{matrix} \right] + \\ + \sum_{j=0}^{r-2} q^{L+A+Y+j+2+(r-j-2)(A+Y+1)} \left[ \begin{matrix} 2A+X+j \\ A+Y-1 \end{matrix} \right].$$

Повторное применение (3.3.4) дает

$$\begin{aligned}
 q^{L+2A+2Y+r} \left[ \begin{matrix} 2A+X+r-2 \\ A+Y \end{matrix} \right] &= \\
 &= \sum_{j=0}^{r-3} q^{j(A+Y)+L+2A+2Y+r} \left[ \begin{matrix} 2A+X+r-3-j \\ A+Y-1 \end{matrix} \right] + \\
 &\quad + q^{L+2A+2Y+r+(r-2)(A+Y)} \left[ \begin{matrix} 2A+X \\ A+Y \end{matrix} \right] = \\
 &= \sum_{j=0}^{r-3} q^{(r-1-j)(A+Y)+L+r} \left[ \begin{matrix} 2A+X+j \\ A+Y-1 \end{matrix} \right] + q^{L+r(A+Y+1)} \left[ \begin{matrix} 2A+X \\ A+Y \end{matrix} \right] = \\
 &= \sum_{j=0}^{r-3} q^{L+A+Y+j+2+(r-j-2)(A+Y+1)} \left[ \begin{matrix} 2A+X+j \\ A+Y-1 \end{matrix} \right] + \\
 &\quad + q^{L+r(A+Y+1)} \left[ \begin{matrix} 2A+X \\ A+Y \end{matrix} \right].
 \end{aligned}$$

Стало быть, комбинируя эти два результата, находим

$$\begin{aligned}
 f(A, r; X, Y, L) - f(A, r-1; A, Y, L) - \\
 - q^{L+2A+2Y+r} \left[ \begin{matrix} 2A+X+r-2 \\ A+Y \end{matrix} \right] + f(A-1, r; X, Y, L) = \\
 = q^{L+A+Y+r} \left[ \begin{matrix} 2A+X+r-2 \\ A+Y-1 \end{matrix} \right] + f(A-1, r; X, Y, L) = \\
 = q^{L+A+Y+r} \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} q^{j(A+Y-1)} \left[ \begin{matrix} 2A+X+r-3-j \\ A+Y-2 \end{matrix} \right] + \right. \\
 \left. + q^{r(A+Y-1)} \left[ \begin{matrix} 2A+X-2 \\ A+Y-1 \end{matrix} \right] \right\} + f(A-1, r; X, Y, L) \stackrel{(3.3.4)}{=} \\
 = \sum_{j=0}^{r-1} q^{L+A+Y+r+(r-1-j)(A+Y-1)} \left[ \begin{matrix} 2A+X-2+j \\ A+Y-2 \end{matrix} \right] + \\
 + q^{L+(r+1)(A+Y)} \left[ \begin{matrix} 2A+X-2 \\ A+Y-1 \end{matrix} \right] + f(A-1, r; X, Y, L) = \\
 = q^L \frac{(1+q^{(r+2)(A+Y)})}{(1-q^{A+Y})} \left[ \begin{matrix} 2(A-1)+X \\ A-1+Y \end{matrix} \right] + \\
 + \sum_{j=0}^{r-2} q^{L+A+Y+j+1} \frac{(1-q^{(r-j)(A+Y)})}{(1-q^{A+Y})} \left[ \begin{matrix} 2(A-1)+X+j \\ A-1+Y-1 \end{matrix} \right] = \\
 = f(A-1, r+1; X, Y, L).
 \end{aligned}$$

Теперь мы полностью подготовлены к доказательству основной для нашего решета теоремы о производящих функциях.

**Т е о р е м а 9.9.** Пусть  $b = a$  или  $a - 1$  и  $k \geq i > 0$ . Тогда

$$M_{k,i}(a, b; 2\mu; q) = q^{\mu((4k+2)\mu + (2k-2i+1))} \left[ \begin{matrix} a+b \\ b-(2k+1)\mu \end{matrix} \right], \quad (9.3.9)$$

$$M_{k,i}(a, b; 2\mu-1; q) = q^{(2\mu-1)((2k+1)\mu - (2k-i+1))} \left[ \begin{matrix} a+b \\ b-(2k+1)\mu + 2k-i+1 \end{matrix} \right]; \quad (9.3.10)$$

$$P_{k,i}(a, b; 2\mu; q) = q^{\mu((4k+2)\mu - (2k-2i+1))} \left[ \begin{matrix} a+b \\ b+(2k+1)\mu \end{matrix} \right], \quad (9.3.11)$$

$$P_{k,i}(a, b; 2\mu-1; q) = q^{(2\mu-1)((2k+1)\mu - i)} \left[ \begin{matrix} a+b \\ a-(2k+1)\mu + i \end{matrix} \right]. \quad (9.3.12)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Прежде всего заметим, что рекуррентные соотношения (9.3.5) и (9.3.6) вместе с начальными условиями (9.3.7) и (9.3.8) однозначно определяют  $M_{k,i}(a, b; \mu; q)$  и  $P_{k,i}(a, b; \mu; q)$ . Введем теперь новые функции  $M_{k,i}^*(a, b; \mu; q)$ ,  $P_{k,i}^*(a, b; \mu; q)$ , определяемые в терминах многочленов Гаусса, и наша задача будет состоять в том, чтобы доказать их тождественность изначальным производящим функциям:

$$M_{k,i}^*(a, b; 2\mu; q) = q^{\mu((4k+2)\mu + (2k-2i+1))} \left[ \begin{matrix} a+b \\ b-(2k+1)\mu \end{matrix} \right], \quad a-b \geq -(i-1), \quad (9.3.13)$$

$$M_{k,i}^*(a, b; 2\mu-1; q) = q^{(2\mu-1)((2k+1)\mu - (2k-i+1))} \left[ \begin{matrix} a+b \\ b-(2k+1)\mu + 2k-i+1 \end{matrix} \right], \quad a-b \geq -(i-1); \quad (9.3.14)$$

$$P_{k,i}^*(a, b; 2\mu; q) = q^{\mu((4k+2)\mu - (2k-2i+1))} \left[ \begin{matrix} a+b \\ a-(2k+1)\mu \end{matrix} \right], \quad a-b \leq 2k-i, \quad (9.3.15)$$

$$P_{k,i}^*(a, b; 2\mu-1; q) = q^{(2\mu-1)((2k+1)\mu - i)} \left[ \begin{matrix} a+b \\ a-(2k+1)\mu + i \end{matrix} \right], \quad a-b \leq 2k-i; \quad (9.3.16)$$

$$\begin{aligned} M_{k,i}^*(a-1, a+i-1+r; 2\mu; q) = \\ = q^{((4k+2)\mu + (2k-2i+1))} \frac{(1-q^{(r+2)(a+i-1-(2k+1)\mu}))}{(1-q^{a+i-1-(2k+1)\mu})} \times \\ \times \left[ \begin{matrix} 2a+i-3 \\ a+i-2-(2k+1)\mu \end{matrix} \right] + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{r-1} q^{\mu((4k+2)\mu + (2k-2i+1)) + a+i-(2k+1)\mu+j} \times \\
& \times \frac{(1-q^{(r-j)(a+i-1-(2k+1)\mu)})}{(1-q^{a+i-1-(2k+1)\mu})} \left[ \frac{2a+i-3+j}{a+i-3-(2k+1)\mu} \right], \\
& r \geq -1, \quad a \geq 1, \quad \mu \geq 1, \quad (9.3.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{k,i}^*(a-1, a+i-1+r; 2\mu-1; q) = \\
= q^{(2\mu-1)((2k+1)\mu - (2k-i+1))} \frac{(1-q^{(r+2)(a-(2k+1)\mu+2k)})}{(1-q^{a-(2k+1)\mu+2k})} \times \\
\times \left[ \frac{2a+i-3}{a-(2k+1)\mu+2k-1} \right] + \\
+ \sum_{j=0}^{r-1} q^{(2\mu-1)((2k+1)\mu - (2k-i+1)) + a-(2k+1)\mu+2k+1+j} \times \\
\times \frac{(1-q^{(r-j)(a-(2k+1)\mu+2k)})}{(1-q^{a+(2k+1)\mu+2k})} \left[ \frac{2a+i-3+j}{a-(2k+1)\mu+2k-2} \right], \\
r \geq -1, \quad a \geq 1, \quad \mu \geq 1; \quad (9.3.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{k,i}^*(b+2k-i-1+r, b-1; 2\mu; q) = \\
= q^{\mu((4k+2)\mu - (2k-2i+1))} \frac{(1-q^{(r+1)(b+2k-i-(2k+1)\mu)})}{(1-q^{b+2k-i-(2k+1)\mu})} \times \\
\times \left[ \frac{2b+2k-i-2}{b+2k-i-1-(2k+1)\mu} \right] + \\
+ \sum_{j=0}^{r-2} q^{\mu((4k+2)\mu - (2k-2i+1)) - (2k+1)\mu + b+j+2k-i+1} \times \\
\times \frac{(1-q^{(r-j-1)(b+2k-i-(2k+1)\mu)})}{(1-q^{b+2k-i-(2k+1)\mu})} \left[ \frac{2b+2k-i-2+j}{b+2k-i-2-(2k+1)\mu} \right], \\
r \geq 0, \quad b \geq 1, \quad \mu \geq 1, \quad (9.3.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{k,i}^*(b+2k-i-1+r, b-1; 2\mu-1; q) = \\
= q^{(2\mu-1)((2k+1)\mu - i)} \frac{(1-q^{(r+1)(b+2k-(2k-1)\mu)})}{(1-q^{b+2k-(2k+1)\mu})} \times \\
\times \left[ \frac{2b+2k-i-2}{b+2k-1-(2k+1)\mu} \right] + \\
+ \sum_{j=0}^{r-2} q^{(2\mu-1)((2k+1)\mu - i) - (2k+1)\mu + b+j+2k+1} \times
\end{aligned}$$

$$\times \frac{(1 - q^{(r-j-1)(b+2k-(2k+1)\mu)})}{(1 - q^{b+2k-(2k+1)\mu})} \left[ \frac{2b+2k-i-2+j}{b+2k-2-(2k+1)\mu} \right],$$

$$r \geq 0, b \geq 1, \mu \geq 1. \quad (9.3.20)$$

Наконец,

$$M_{k,i}^*(a, b; 0; q) = P_{k,i}^*(a, b; 0; q) = \left[ \frac{a+b}{a} \right]. \quad (9.3.21)$$

Прежде всего отметим, что начальное условие (9.3.7) представлено в (9.3.21). Кроме того, если  $a$  или  $b$  равны нулю в  $M_{k,i}^*$  и  $P_{k,i}^*$  при  $\mu \geq 1$ , то непосредственная проверка (см. (9.3.13)—(9.3.20)) показывает, что и сами эти функции обращаются в нуль. Поэтому для них выполнены все начальные условия леммы 9.6.

Обратимся теперь к рекуррентным соотношениям (9.3.5) и (9.3.6). Первая половина (9.3.5) и вторая половина (9.3.6) получаются применением леммы 9.7 к соответствующим равенствам среди равенств (9.3.13)—(9.3.17). Наконец, в обозначениях леммы 9.8, получаем

$$M_{k,i}^*(a-1, a+i-1+r; 2\mu; q) =$$

$$= f(a, r+1; i-1, i-2-(2k+1)\mu, (4k+2)\mu^2 +$$

$$+ (2k-2i+1)\mu), \quad a \geq 1, r \geq -1, \mu > 0, \quad (9.3.22)$$

$$M_{k,i}^*(a-1, a+i-1+r; 2\mu-1; q) =$$

$$= f(a, r+1; i-3, 2k-1-(2k+1)\mu, (2\mu-1)((2k+1)\mu -$$

$$- 2k+i-1)), \quad a \geq 1, r \geq -1, \mu > 0; \quad (9.3.23)$$

$$P_{k,i}^*(b+2k-i-1+r, b-1; 2\mu; q) =$$

$$= f(b, r; 2k-i-2, 2k-i-1-(2k+1)\mu, (4k+2)\mu^2 -$$

$$- (2k-2i+1)\mu), \quad b \geq 1, r \geq 0, \mu > 0, \quad (9.3.24)$$

$$P_{k,i}^*(b+2k-i-1+r, b-1, 2\mu-1; q) =$$

$$= f(b, r; 2k-i-2, 2k-1-(2k+1)\mu,$$

$$(2\mu-1)((2k+1)\mu-i)), \quad b \geq 1, r \geq 0, \mu > 0. \quad (9.3.25)$$

Теперь простая проверка устанавливает, что лемма 9.8 влечет для  $M_{k,i}^*$  и  $P_{k,i}^*$  при  $\mu > 0$  выполнение второй половины (9.3.5) и первой половины (9.3.6).

Таким образом,  $M_{k,i}^*$  и  $P_{k,i}^*$  удовлетворяют равенствам (9.3.5), (9.3.6), (9.3.7) и (9.3.8), а поскольку эти четыре равенства однозначно определяют  $M_{k,i}$  и  $P_{k,i}$ , то видим, что

$$P_{k,i}(a, b; \mu; q) = P_{k,i}^*(a, b; \mu; q), \quad (9.3.26)$$

$$M_{k,i}(a, b; \mu; q) = M_{k,i}^*(a, b; \mu; q). \quad (9.3.27)$$

Равенство (9.3.9) теперь следует из (9.3.13) и (9.3.27); (9.3.10) следует из (9.3.14) и (9.3.27); (9.3.11) следует из (9.3.15) и (9.3.25); наконец, (9.3.12) следует из (9.3.16) и (9.3.26).

**О п р е д е л е н и е 9.4.** Пусть  $p_{k,i}(\mu; N)$  (соответственно  $m_{k,i}(\mu; N)$ ) обозначает число разбиений  $N$  с  $(k, i)$ -положительной (соответственно  $(k, i)$ -отрицательной) осцилляцией, не меньшей  $\mu$ .

**О п р е д е л е н и е 9.5.** Положим

$$P_{k,i}(\mu; q) = \sum_{N \geq 0} p_{k,i}(\mu; N) q^N, \quad M_{k,i}(\mu; q) = \sum_{N \geq 0} m_{k,i}(\mu; N) q^N.$$

**Т е о р е м а 9.10.** При  $|q| < 1$  имеют место следующие равенства:

$$M_{k,i}(2\mu; q) = \frac{q^{\mu((4k+2)\mu + 2k - 2i + 1)}}{(q)_{\infty}}, \quad \mu \geq 0, \quad (9.3.28)$$

$$M_{k,i}(2\mu - 1; q) = \frac{q^{(2\mu-1)((2k+1)\mu - 2k + i - 1)}}{(q)_{\infty}}, \quad \mu > 0; \quad (9.3.29)$$

$$P_{k,i}(2\mu; q) = \frac{q^{\mu((4k+2)\mu - 2k + 2i - 1)}}{(q)_{\infty}}, \quad \mu \geq 0, \quad (9.3.30)$$

$$P_{k,i}(2\mu - 1; q) = \frac{q^{(2\mu-1)((2k+1)\mu - i)}}{(q)_{\infty}}, \quad \mu > 0. \quad (9.3.31)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Во-первых, заметим, что при  $|q| < 1$

$$|P_{k,i}(\mu; q) - P_{k,i}(a, a; \mu; q)| \leq \sum_{n=a+1}^{\infty} p(n) |q|^n \rightarrow 0, \quad a \rightarrow \infty,$$

$$|M_{k,i}(\mu; q) - M_{k,i}(a, a; \mu; q)| = \sum_{n=a+1}^{\infty} p(n) |q|^n \rightarrow 0, \quad a \rightarrow \infty,$$

где  $p(n)$  — обычная функция разбиений. Кроме того,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} q^x \left[ \frac{2a+y}{a-z} \right] = \frac{q^x}{(q)_{\infty}}.$$

Следовательно, (9.3.28) следует из (9.3.9), (9.3.29) — из (9.3.10), (9.3.10) — из (9.3.11), а (9.3.11) следует из (9.3.12).

Теперь мы введем функцию разбиений, естественным образом возникающую из нашей «техники решета».

**О п р е д е л е н и е 9.6.** Пусть  $Q_{k,i}(n)$  обозначает число разбиений  $\pi$  числа  $n$  таких, что для каждого из последовательных рангов  $\pi$  выполнены неравенства

$$-(i-2) \leq r_j(\pi) \leq 2k - i - 1.$$

Следующая лемма представляет собой принцип включения-исключения нашего решета.

**Л е м м а 9.11.** Для каждого целого  $n \geq 0$  выполняется равенство

$$Q_{k,i}(n) = p_{k,i}(0; n) + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} m_{k,i}(\mu; n) + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} p_{k,i}(\mu; n). \quad (9.3.32)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Во-первых, заметим, что  $Q_{k,i}(n)$  — это объем множества всех разбиений  $n$  с нулевыми  $(k, i)$ -осцилляциями.

С другой стороны, правая часть (9.3.32) — это весовой пересчет всех разбиений  $n$ . Вначале предположим, что  $\pi$  — разбиение  $n$  с нулевыми  $(k, i)$ -осцилляциями. Тогда  $\pi$  подсчитывается однократно величиной  $p_{k,i}(0; n)$  и совсем не учитывается величинами  $m_{k,i}(\mu; n)$  и  $p_{k,i}(\mu; n)$  при  $\mu > 0$ . Предположим далее, что  $\pi$  — разбиение  $n$  с  $(k, i)$ -положительной осцилляцией  $r > 0$ . По лемме 9.3  $(k, i)$ -отрицательная осцилляция  $\pi$  равна либо  $r - 1$ , либо  $r + 1$ ; если она равна  $r - 1$ , то весовой подсчет  $\pi$  есть

$$1 + \sum_{\mu=1}^{r-1} (-1)^{\mu} + \sum_{\mu=1}^r (-1)^{\mu} = 1 + \sum_{\mu=1}^{r-1} (-1)^{\mu} - \sum_{\mu=0}^{r-1} (-1)^{\mu} = 0;$$

если же она равна  $r + 1$ , то

$$1 + \sum_{\mu=1}^{r+1} (-1)^{\mu} + \sum_{\mu=1}^r (-1)^{\mu} = 1 - \sum_{\mu=0}^r (-1)^{\mu} + \sum_{\mu=1}^r (-1)^{\mu} = 0.$$

Наконец, если  $(k, i)$ -положительная осцилляция  $\pi$  равна 0, а  $(k, i)$ -отрицательная осцилляция  $\pi$  равна 1, то этот весовой подсчет  $\pi$  есть  $1 - 1 = 0$ .

Таким образом, мы видим, что правая часть выражения в (9.3.32) подсчитывает однократно каждое разбиение  $n$  с нулевыми  $(k, i)$ -осцилляциями и дает нуль на все иные разбиения  $n$ . Следовательно, правая часть выражения в (9.3.32) в точности совпадает с  $Q_{k,i}(n)$ .

**Т е о р е м а 9.12.** Пусть  $A_{k,i}(n)$  обозначает число разбиений числа  $n$  на части, не сравнимые с 0,  $\pm i \pmod{2k+1}$ . Тогда при  $0 < i \leq k$  и при каждом  $n \geq 0$  выполняется равенство

$$A_{k,i}(n) = Q_{k,i}(n).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно лемме 9.11 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{k,i}(n) q^n &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{k,i}(0; n) q^n + \\ &+ \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} m_{k,i}(\mu; n) q^n + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} p_{k,i}(\mu; n) q^n = \\ &= P_{k,i}(0; q) + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} M_{k,i}(\mu; q) + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} P_{k,i}(\mu; q) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu=1}^{\infty} M_{k,i}(2\mu; q) - \sum_{\mu=1}^{\infty} M_{k,i}(2\mu-1; q) + \\
&+ \sum_{\mu=0}^{\infty} P_{k,i}(2\mu; q) - \sum_{\mu=1}^{\infty} P_{k,i}(2\mu-1; q) = \\
&= (q)_{\infty}^{-1} \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} q^{\mu((4k+2)\mu+2k-2i+1)} - \sum_{\mu=1}^{\infty} q^{(2\mu-1)((2k+1)\mu-2k+i-1)} + \right. \\
&+ \sum_{\mu=1}^{\infty} q^{\mu((4k+2)\mu-2k+2i-1)} - \sum_{\mu=1}^{\infty} q^{(2\mu-1)((2k+1)\mu-i)} \Big\} = \\
&= (q)_{\infty}^{-1} \left\{ \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} q^{2\mu((2k+1)2\mu-2k+2i-1)/2} - \right. \\
&- \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} q^{(2\mu-1)((2k+1)(2\mu-1)-2k+2i-1)/2} \Big\} = \\
&= (q)_{\infty}^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n((2k+1)n-2k+2i-1)/2} = \\
&= (q)_{\infty}^{-1} \prod_{m=0}^{\infty} (1 - q^{(m+1)(2k+1)}) (1 - q^{(2k+1)m+i}) \times \\
&\times (1 - q^{(2k+1)(m+1)-i}) \stackrel{(2.8)}{=} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq 0, \pm i \pmod{2k+1}}}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{k,i}(n) q^n.
\end{aligned}$$

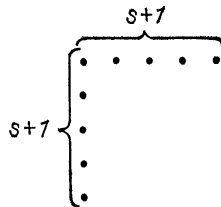
Поэтому, приравнявая коэффициенты при  $q^n$  в этом тождестве, получаем

$$A_{k,i}(n) = Q_{k,i}(n)$$

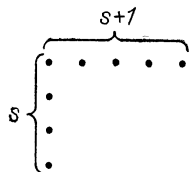
при каждом  $n \geq 0$ .

Легко показать, что  $Q_{2,2}(n) = B_{2,2}(n)$  и  $Q_{2,1}(n) = B_{2,1}(n)$ , и тогда следствия 7.6 и 7.7 (тождества Роджерса—Рамануджана) следуют из теоремы 9.12.

Для доказательства того, что  $Q_{2,2}(n) = B_{2,2}(n)$ , рассмотрим разбиение  $\pi$  типа перечисляемого  $B_{2,2}(n)$ ; пусть, скажем,  $\pi = (C_1 C_2 \dots C_i)$ , где  $C_i - C_{i+1} \geq 2$ . Образует графическое представление  $\pi$  следующим образом. Пусть  $i$ -я часть  $\pi$  изображается в виде  $i$ -го угла, где если  $C_i = 2s + 1$ , то угол имеет вид

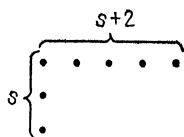


если же  $C_i = 2s$ , то угол имеет вид



Поскольку  $C_1 - C_{i+1} \geq 2$ , то эти углы в действительности образуют последовательные углы графического представления некоторого разбиения, последовательные ранги которого равны, очевидно, 0 или 1. Таким образом, построено разбиение типа перечисляемого  $Q_{2,2}(n)$ . Ясно, что такая процедура устанавливает взаимно однозначное соответствие между этими двумя типами разбиений, и, стало быть,  $B_{2,2}(n) = Q_{2,2}(n)$ .

Для доказательства того, что  $B_{2,1}(n) = Q_{2,1}(n)$ , действуем точно так же, только для  $C_i = 2s + 1$  угол представляем в виде



Далее рассуждаем так же, с той лишь разницей, что нет углов в одной единственной точке; это и обеспечивает разницу между  $B_{2,2}(n)$  и  $B_{2,1}(n)$ . Таким образом,  $B_{2,1}(n) = Q_{2,1}(n)$ .

Здесь возникает ряд интересных вопросов, связанных с техникой решета.

**В о п р о с 1.** Можно ли найти прямое графическое доказательство того, что  $B_{k,a}(n) = Q_{k,a}(n)$ ?

**В о п р о с 2.** Существуют ли такие методы решета, которые могут быть использованы при изучении некоторых (или всех) функций разбиений из гл. 7 и 8?

**В о п р о с 3.** Из теоремы 9.10 можно вывести равенства

$$m_{k,i}(2\mu; n) = p(n - \mu((4k + 2)\mu + 2k - 2i + 1)),$$

$$m_{k,i}(2\mu - 1; n) = p(n - (2\mu - 1)((2k + 1)\mu - 2k + i - 1));$$

$$p_{k,i}(2\mu; n) = p(n - \mu((4k + 2)\mu - 2k + 2i - 1)),$$

$$p_{k,i}(2\mu - 1; n) = p(n - (2\mu - 1)((2k + 1)\mu - i)).$$

Существуют ли прямые комбинаторные доказательства этих соотношений?

### Задачи

1. Метод включения-исключения, используемый при доказательстве теоремы 9.1, может быть применен для получения комбинаторных интерпретаций и доказательств многих элементарных тождеств с бесконечными произведениями, например, таких, как

$$\frac{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)} = 1, \quad \frac{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n+m})}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)} = \prod_{n=1}^m (1 - q^n)^{-1}.$$

2. Пусть  $\varepsilon_e(n)$  (соответственно  $\varepsilon_0(n)$ ) обозначает число разбиений  $n$  на различные неотрицательные части с наименьшей четной частью и четным (соответственно нечетным) числом четных частей. Тогда

$$\varepsilon_0(n) - \varepsilon_e(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ — не квадрат,} \\ 1, & \text{если } n \text{ — квадрат.} \end{cases}$$

Например,  $n = 9$ ;  $\varepsilon_e(9) = (8+1+0, 7+2+0, 6+3+0, 5+4+0, 4+3+2)$ ;  $\varepsilon_0(9) = (9+0, 7+2, 6+2+1+0, 5+4, 5+3+1+0, 4+3+2+0)$ .

Соответствующее тождество с производящими функциями имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} (q^{2n+2}; q^2)_{\infty} (-q^{2n+1}; q^2)_{\infty} = \sum_{m=0}^{\infty} q^{m^2}.$$

Это чисто аналитическое утверждение вполне легко доказывается (в следствии 2.3 заменить  $q$  на  $q^2$ , положить  $c = -q$ ,  $a = 0$ ,  $t = q^2$  и устремить  $b \rightarrow 0$ ). В действительности можно комбинаторно доказать каждый шаг в следующей «аналитической» цепочке (с указанием номеров задач):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_0(n) - \varepsilon_e(n)) q^n &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} (q^{2n+2}; q^2)_{\infty} (-q^{2n+1}; q^2)_{\infty} = \\ &= (q^2; q^2)_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} \frac{1}{(q^2; q^2)_n} (-q^{2n+1}; q^2)_{\infty} = \\ &\stackrel{17 \text{ (гл. 2)}}{=} (q^2; q^2)_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(q^2; q^2)_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m^2+2mn}}{(q^2; q^2)_{\infty}} = \\ &\stackrel{17 \text{ (гл. 2)}}{=} (q^2; q^2)_{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(q^2; q^2)_m} \frac{1}{(q^{2m+2}; q^2)_{\infty}} = \sum_{m=0}^{\infty} q^{m^2}. \end{aligned}$$

3. Методы задачи 2 обобщить и доказать тождество

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} q^{2kn} (q^{2kn+2k}; q^{2k})_{\infty} (-q^{2kn+1}; q^2)_{\infty} &= \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \prod_{j=1}^n (1 + q^j + q^{2j} + \dots + q^{(k-1)j}). \end{aligned}$$

4. Вывести тождества (здесь  $[x]$  — целая часть числа  $x$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} q^{j^2 + ja} \left[ \begin{matrix} n+1-a-j \\ j \end{matrix} \right] &= \\ &= \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} (-1)^{\lambda} q^{\lambda(5\lambda+1)/2 - 2a\lambda} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ [(n+1-5\lambda)/2] + a \end{matrix} \right], \quad a = 0 \text{ или } 1, \\ &\quad \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} (-1)^{\lambda} q^{\lambda(3\lambda+1)/2} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ [(n+1-3\lambda)/2] \end{matrix} \right] = 1 \end{aligned}$$

из теоремы 9.9. Решето, используемое в теореме 9.12, здесь надо применять непосредственно к производящим функциям из теоремы 9.9. Случай  $a+b = n+1$ ,  $k=2$ ,  $i=2-a$  по существу влечет первое тождество, а случай  $a+b = n+1$ ,  $k=i=1$  — сразу второе.

### З а м е ч а н и я

В конце девятнадцатого [14] и начале двадцатого столетий [10, 11] предпринималось интенсивное изучение разбиений с точки зрения, изложенной в § 9.2. Приведенные в этом параграфе теоремы взяты из [1, 6].

Материал § 9.3 также взят из [3, 4]. Такие результаты выводились с целью получения комбинаторной интерпретации аналитического доказательства [12] тождеств Роджерса — Рамануджана—Шура. Обзор недавних работ в этой области можно найти в [9, раздел Р68].

Задача 1 — [14, 1]; задача 2 — [5, 13]; задача 4 — [12, 2, 3, 4].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Andrews G. E. (1969). On a calculus of partition functions. — Pacific J. Math. **31**, p. 555—562.
2. Andrews G. E. (1970). A polynomial identity which implies the Rogers—Ramanujan identities. — Scripta Math. **28**, p. 297—305.
3. Andrews G. E. (1971). Sieves for theorems of Euler, Rogers and Ramanujan. — In: The Theory of Arithmetic Functions (A. A. Gioia and D. L. Goldsmith, eds.) (Lecture Notes in Math, № 251), Springer, Berlin.
4. Andrews G. E. (1972a). Sieves in the theory of partitions. — Amer. J. Math. **94**, p. 1214—1230.
5. Andrews G. E. (1972b). Problem 5865. — Amer. Math. Monthly **79**, p. 668.
6. Andrews G. E. (1975). Partially ordered sets and the Rogers—Ramanujan identities. — Aequationes Math. **12**, p. 94—107.
7. Atkin A. O. L. (1966). A note on ranks and conjugacy of partitions. — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **17**, p. 335—338.
8. Dyson F. J. (1944). Some guesses in the theory of partitions. — Eureka (Cambridge) **8**, p. 10—15.
9. LeVeque W. J. (1974). Reviews in Number Theory, Vol. 4. — Amer. Math. Soc. Providence, R. I.
10. Schrutka L. von (1916). Zur Systematik der additiven Zahlentheorie. — J. Reine Angew. Math. **146**, p. 245—254.
11. Schrutka L. von (1917). Zur additiven Zahlentheorie. — S. B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien, Abt. 11a **125**, p. 1081—1163.
12. Schur I. J. (1917). Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie und zur Theorie der Kettenbrüche. — S.-B. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl., p. 302—321. (Reprinted in I. Schur, Gesammelte Abhandlungen, Vol. 2, p. 117—136. Springer, Berlin, 1973.)
13. Stenger A. (1973). Solution to Problem 5865. — Amer. Math. Monthly **80**, 1148.
14. Vahlen K. T. (1893). Beiträge zu einer additiven Zahlentheorie. — J. Reine Angew. Math. **112**, p. 1—36.



## СВОЙСТВА ДЕЛИМОСТИ ФУНКЦИЙ РАЗБИЕНИЙ

### 10.1. Введение

В главе 5 мы видели, сколь замечательные плоды породило сотрудничество Харди и Рамануджана. Та же сила породила и удивительные открытия Рамануджана о свойствах делимости функции  $p(n)$ . Следующие слова Рамануджана описывают его знаменитую гипотезу на эту тему:

«В моей недавней работе с Харди приведена таблица значений  $p(n)$ , вычисленных майором Мак-Магоном, — числа всех разбиений  $n$  для  $n$  от 1 до 200. При изучении чисел в этой таблице я подметил ряд любопытных свойств, связанных с делимостью  $p(n)$ . Так, например,

- |   |                        |
|---|------------------------|
| (1) $p(4), p(9), p(14), p(19), \dots$     | $\equiv 0 \pmod{5},$   |
| (2) $p(5), p(12), p(19), p(26), \dots$    | $\equiv 0 \pmod{7},$   |
| (3) $p(6), p(17), p(28), p(39), \dots$    | $\equiv 0 \pmod{11},$  |
| (4) $p(24), p(49), p(74), p(99), \dots$   | $\equiv 0 \pmod{25},$  |
| (5) $p(19), p(54), p(89), p(124), \dots$  | $\equiv 0 \pmod{35},$  |
| (6) $p(47), p(96), p(145), p(194), \dots$ | $\equiv 0 \pmod{49},$  |
| (7) $p(39), p(94), p(149), \dots$         | $\equiv 0 \pmod{55},$  |
| (8) $p(61), p(138), \dots$                | $\equiv 0 \pmod{77},$  |
| (9) $p(116), \dots$                       | $\equiv 0 \pmod{121},$ |
| (10) $p(99), \dots$                       | $\equiv 0 \pmod{125}.$ |

Из этого я предположил, что верна следующая теорема:  
Если  $\delta = 5^a 7^b 11^c$  и  $24\lambda \equiv 1 \pmod{\delta}$ , то

$$p(\lambda), p(\lambda + \delta), p(\lambda + 2\delta), \dots \equiv 0 \pmod{\delta}.$$

Эта теорема подтверждается всеми имеющимися наблюдениями, но пока я не в состоянии найти ее общее доказательство».

В той же работе, из которой приведен этот отрывок, Рамануджан представил доказательства сравнений

$$p(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}, \tag{10.1.1}$$

$$p(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7} \tag{10.1.2}$$

и кратко обрисовал доказательства двух других результатов:

$$p(25n + 24) \equiv 0 \pmod{25}, \quad p(49n + 47) \equiv 0 \pmod{49}.$$

В связи с такими сравнениями Рамануджан доказал ряд тождеств с функциями разбиений, таких, например, как тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n + 4) q^n = 5 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{5n})^5}{(1 - q^n)^6}, \quad (10.1.3)$$

почитавшееся Харди за один из лучших результатов Рамануджана.

Рассмотрение общей гипотезы Рамануджана о делимости  $p(n)$  привело к ряду частных результатов типа тех, что указаны выше. В 1930 году Човла (изучая более полную таблицу значений  $p(n)$ , принадлежащую Гупта) заметил, что  $p(243) = 133978259344888 \not\equiv 0 \pmod{7^3}$ , в то время как  $24 \cdot 243 \equiv 1 \pmod{7^3}$ . Поэтому гипотеза Рамануджана в такой постановке неверна. В 1938 году Ватсон показал, что модифицированная форма этой гипотезы верна для всех степеней 5 и 7, а в 1967 году (по прошествии 48 лет с момента опубликования исходной гипотезы Рамануджана) Аткином была доказана следующая модифицированная гипотеза:

*Если  $\delta = 5^{a7^b11^c}$  и  $24\lambda \equiv 1 \pmod{\delta}$ , то*

$$p(\lambda) \equiv 0 \pmod{5^{a7^{(b+2)/2}11^c}}.$$

Содержание этой главы служит для ознакомления с теми аналитическими методами, которые обеспечивают наиболее эффективные подходы к таким задачам. В таких аналитических подходах почти всегда присутствует некая форма оператора Гекке; в § 10.2 видно, как этот оператор используется для доказательства гипотезы Чёрчауза о двоичных разбиениях.

В гипотезе Рамануджана мы ограничимся степенями 5, изложив упрощенный вариант исходного доказательства Ватсона, принадлежащий Аткину. Это доказательство, превосходно изложенное в [9], здесь излагается не во всей полноте. В частности, обоснование свойств  $p(n)$ , основывающихся на том факте, что

$$\sum_{n \geq 0} p(n) e^{2\pi i n \tau} = e^{\pi i \tau / 12} (\eta(\tau))^{-1}$$

(где  $\eta(\tau)$  — модулярная форма), потребовало бы большой предварительной работы, более подходящей для книги по аналитической теории чисел или эллиптическим функциям (см., например, [9]). Если в гл. 5 мы без доказательства принимали (5.2.2), то здесь также принимается (10.3.1) — модулярное уравнение пятого порядка. После подтверждения гипотезы Рамануджана для степеней 5 мы завершаем эту главу обсуждением гипотез Дайсона (доказанных Аткином и Свиннертоном-Дайером в 1950 году), которые представляют собой комбинаторные интерпретации для (10.1.1) и (10.1.2).

## 10.2. Теорема Рёдсета о двоичных разбиениях

Начнем с некоторых элементарных замечаний об операторах Гекке. Эти операторы  $U_m$  определены на всех функциях  $f(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n$ , мероморфных в окрестности нуля  $q = 0$ , и задаются по правилу

$$U_m \{f(q)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} q^n.$$

Таким образом, если  $\rho = e^{2\pi i/m}$ , то

$$U_m f(q) = \frac{1}{m} (f(q^{1/m}) + f(\rho q^{1/m}) + \dots + f(\rho^{m-1} q^{1/m})), \quad (10.2.1)$$

поскольку

$$\sum_{j=0}^{m-1} \rho^{rj} = \begin{cases} m, & r \equiv 0 \pmod{m}, \\ 0, & r \not\equiv 0 \pmod{m}. \end{cases}$$

Ясно, что  $U_m$  — линейный оператор.

В этом параграфе рассматриваются двоичные разбиения, т. е. разбиения, в которых каждая часть есть степень двойки. Так, имеются пять двоичных разбиений семерки:  $(1\ 2\ 4)$ ,  $(1^3\ 4)$ ,  $(1\ 2^3)$ ,  $(1^3\ 2^2)$ ,  $(1^7)$ .

Обозначим через  $b(n)$  число двоичных разбиений  $n$  и положим

$$B(q) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n) q^n = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2^n})^{-1}.$$

Введем в рассмотрение последовательность функций,  $m \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m(q) &= (U_2^{m+1} - U_2^{m-1}) B(q) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (b(2^{m+1}n) - b(2^{m-1}n)) q^n. \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

Сразу имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(q^4) &= (U_2^4 - U_2^0) B(q^4) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (b(4n) - b(n)) q^{4n} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 B(i^j q) - B(q^4) = \\ &= \prod_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{2^n})} \left\{ \frac{1}{4} \left[ \sum_{j=0}^3 \frac{1}{(1 - i^j q)(1 - i^{2j} q^2)} \right] - 1 \right\} = \\ &= \prod_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{2^n})} \left\{ \frac{1}{4} \left[ \sum_{j=0}^3 \frac{(1 + i^j q)(1 + i^{2j} q^2)}{(1 - q^4)^2} \right] - 1 \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1-q^4)^2} \prod_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{2n})} (1 + q^4 - 1 + 2q^4 - q^8) = \\
&= \frac{q^4 (3-q^4)}{(1-q^4)^3} \prod_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{2n})}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathcal{F}_1(q) = \frac{q(3-q)}{(1-q)^3} G(q), \quad (10.2.3)$$

где

$$G(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{2n})} = (1-q) B(q).$$

И вообще, согласно (10.2.1)

$$\mathcal{F}_{m+1}(q^2) = U_2 \mathcal{F}_m(q^2) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}_m(q) + \mathcal{F}_m(-q)). \quad (10.2.4)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2(q^2) &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}_1(q) + \mathcal{F}_1(-q)) = \\
&= \frac{1}{2} q G(q) \left[ \frac{3-q}{(1-q)^3} - \frac{3+q}{(1+q)^3} \right] = \frac{8q^2 G(q)}{(1-q^2)^3}.
\end{aligned}$$

Стало быть,

$$\mathcal{F}_2(q) = \frac{8qG(q)}{(1-q)^4}. \quad (10.2.5)$$

Выведем теперь аналогичные формулы для  $\mathcal{F}_3(q)$  и  $\mathcal{F}_4(q)$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3(q^2) &= U_2 \mathcal{F}_2(q^2) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}_2(q) + \mathcal{F}_2(-q)) = \\
&= \frac{4qG(q)}{(1-q^2)^4} ((1+q)^4 - (1-q)^4) = \frac{32q^2 G(q)(1+q^2)}{(1-q^2)^4}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}_3(q) = \frac{32qG(q)(1+q)}{(1-q)^5}. \quad (10.2.6)$$

Это влечет, что

$$\mathcal{F}_3(q) + 4\mathcal{F}_2(q) = \frac{32qG(q)}{(1-q)^5} ((1+q) + (1-q)) = \frac{64qG(q)}{(1-q)^5}. \quad (10.2.7)$$

Далее, применяя  $U_2$  к (10.2.7), находим, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_4(q^2) + 4\mathcal{F}_3(q^2) &= U_2 (\mathcal{F}_3(q^2) + 4\mathcal{F}_2(q^2)) = \\
&= \frac{32qG(q)}{(1-q^2)^5} ((1+q)^5 - (1-q)^5) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{64q^2G(q)}{(1-q^2)^5} ((1-q^2)^2 - 12(1-q^2) + 16) = \\
&= \frac{64q^2G(q)}{(1-q^2)^3} - \frac{768q^2G(q)}{(1-q^2)^4} + \frac{1024q^2G(q)}{(1-q^2)^5}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}_4(q) + 4\mathcal{F}_3(q) = 8\mathcal{F}_2(q) - 12(\mathcal{F}_3(q) + 4\mathcal{F}_2(q)) + \frac{1024qG(q)}{(1-q)^6},$$

или

$$\mathcal{F}_4(q) + 16\mathcal{F}_3(q) + 40\mathcal{F}_2(q) = \frac{1024qG(q)}{(1-q)^6}. \quad (10.2.8)$$

Теперь можно доказать теорему 10.1, обобщающую (10.2.5), (10.2.7) и (10.2.8).

**Т е о р е м а 10.1.** *Существуют целые  $c_j(m)$  такие, что для  $m \geq 2$*

$$\sum_{j=0}^{m-2} c_j(m) \mathcal{F}_{m-j}(q) = 2 \frac{\binom{m+1}{2} qG(q)}{(1-q)^{m+2}},$$

причем  $c_0(m) = 1$ ,  $16 \mid c_1(m)$ , если  $m \geq 4$ ,  $8 \mid c_2(m)$ ,  $16 \nmid c_2(m)$  и  $2^{2j} \mid c_j(m)$  для  $3 \leq j \leq m-2$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из (10.2.5), (10.2.7) и (10.2.8) ясно, что теорема 10.1 верна при  $m = 2, 3$  и  $4$  соответственно. Для  $m \geq 5$  будем действовать по индукции.

Применяя  $U_2$  к равенству из теоремы (с заменой  $q$  на  $q^2$ ), находим

$$\sum_{j=0}^{m-2} c_j(m) \mathcal{F}_{m+1-j}(q^2) = \frac{\binom{m+1}{2} qG(q)}{(1-q^2)^{m+2}} \cdot \frac{1}{2} ((1+q)^{m+2} - (1-q)^{m+2}).$$

Введем теперь целые  $\delta_k(m+2)$  для  $0 \leq k \leq [(m+1)/2]$  по правилу

$$\frac{1}{2} ((1+q)^{m+2} - (1-q)^{m+2}) = q \sum_{k=0}^{[(m+1)/2]} \delta_k(m+2) (1-q^2)^k;$$

это определение корректно, поскольку здесь левая часть — нечетный многочлен. Кроме того, видим, что

$$\delta_0(m+2) = 2^{m+1},$$

$$\begin{aligned}
\delta_1(m+2) &= \lim_{q \rightarrow 1} (1-q^2)^{-1} \left( \frac{1}{2} ((1+q)^{m+2} - (1-q)^{m+2}) - \right. \\
&\quad \left. - q2^{m+1} \right) = -m2^{m-1}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-2} c_j(m) \mathcal{F}_{m+1-j}(q) &= \frac{2^{\binom{m+2}{2}} qG(q)}{(1-q)^{m+3}} - m2^{m-1} \sum_{j=0}^{m-2} c_j(m) \mathcal{F}_{m-j}(q) + \\ &+ \sum_{k=2}^{[(m+1)/2]} \delta_k(m+2) 2^{\binom{m+1}{2} - \binom{m-k+2}{2}} \times \\ &\times \sum_{h=0}^{m-k-1} c_h(m-k+1) \mathcal{F}_{m-k-h+1}(q), \end{aligned}$$

откуда для  $c_j(m+1)$

$$c_0(m+1) = c_0(m) = 1,$$

$$c_1(m+1) = c_1(m) + m2^{m-1} c_0(m) = c_1(m) + m2^{m-1}.$$

Поскольку  $16 \mid c_1(m)$  и  $m > 4$ , видим, что  $16 \mid c_1(m+1)$ ,  $c_2(m+1) = c_2(m) + m2^{m-1} c_1(m) + \delta_2(m+2) 2^m c_0(m-1)$ . Поскольку  $8 \mid c_2(m)$  и  $m \geq 5$ , видим, что  $8 \mid c_2(m+1)$ . Точно так же, поскольку  $16 \nmid c_2(m)$ , видим, что  $16 \nmid c_2(m+1)$  потому, что все остальные члены правой части этого равенства делятся на 16.

Теперь для  $2 < j \leq m-1$  имеем

$$\begin{aligned} c_j(m+1) &= c_j(m) + (m+2) 2^{m-1} c_{j-1}(m) + \\ &+ \sum_{\substack{k+h=j \\ k \geq 2 \\ h \geq 0}} \delta_k(m+2) 2^{\binom{m+1}{2} - \binom{m-k+2}{2}} c_h(m-k+1). \end{aligned}$$

Согласно индукционному предположению  $2^{2j} \mid c_j(m)$  и  $2^{2j} \mid 2^{m-1} c_{j-1}(m)$ . Значит, для доказательства того, что  $2^{2j} \mid c_j(m+1)$ , нам лишь нужно установить, что

$$\binom{m+1}{2} - \binom{m-k+2}{2} + 2h \geq 2j,$$

когда  $k+h=j$ ,  $[(m+1)/2] \geq k \geq 2$ ,  $h \geq 0$ .

В самом деле,

$$\begin{aligned} \binom{m+1}{2} - \binom{m-k+2}{2} + 2h - 1 &= -\binom{k+1}{2} + \\ &+ km - 2 + 2j \geq km - \frac{1}{2}(k^2 + k) - 2 + 2j = \\ &= k\left(m - \frac{1}{2}(k+1)\right) - 2 + 2j \geq 2j, \end{aligned}$$

поскольку  $2 \leq k \leq [(m+1)/2]$ ; таким образом,  $2^{2i} \mid c_j(m+1)$ , и тем самым теорема доказана.

Эта теорема приведет нас к доказательству некоторых сравнений с  $b(4n) - b(n)$ , первоначально выдвинутых Чёрчаузом в качестве гипотез и, независимо, доказанных Рёдсетом и Гупта.

**Теорема 10.2.** Пусть  $k \geq 1$  и  $t \equiv 1 \pmod{2}$ ; тогда

$$b(2^{2k+2}t) - (b^{2k}t) \equiv 0 \pmod{2^{3k+2}}, \quad (10.2.9)$$

$$b(2^{2k+1}t) - b(2^{2k-1}t) \equiv 0 \pmod{2^{3k}}, \quad (10.2.10)$$

причем сравнения (10.2.9) и (10.2.10) — наилучшие возможные в том смысле, что нет более высоких степеней двойки, делящих  $b(4n) - b(n)$ .

**Доказательство.** Мы покажем, что функции

$$2^{-3k-2}\mathcal{F}_{2k+1}(q), \quad 2^{-3k}\mathcal{F}_{2k}(q)$$

имеют целые коэффициенты и что эти коэффициенты при нечетных степенях  $q$  сами нечетны. Это эквивалентно теореме 10.2.

Если  $k = 1$ , то (10.2.5) влечет, что

$$\frac{1}{8}\mathcal{F}_2(q) = \frac{qG(q)}{(1-q)^4} \equiv \frac{qB(q)}{(1-q)^3} \equiv \frac{q}{(1-q)^2} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} q^{2j+1} \pmod{2};$$

точно так же согласно (10.2.6) имеем

$$\frac{1}{32}\mathcal{F}_3(q) = \frac{q(G(q)(1+q))}{(1-q)^5} \equiv \frac{qB(q)}{(1-q)^3} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} q^{2j+1} \pmod{2}.$$

Таким образом, теорема доказана для  $k = 1$ .

Предположим, что теорема верна для всех целых, меньших  $k$ . Тогда по теореме 10.1

$$\begin{aligned} 2^{-3k}\mathcal{F}_{2k}(q) + 2^{-3k}c_1(2k)\mathcal{F}_{2k-1}(q) + 2^{-3k}c_2(2k)\mathcal{F}_{2k-2}(q) + \\ + \sum_{j=3}^{2k-1} 2^{-3k}c_j(2k)\mathcal{F}_{2k-j}(q) = \frac{2^{\binom{2k+1}{2} - 3k} qG(q)}{(1-q)^{2k+2}}. \end{aligned}$$

По той же теореме  $16 \mid c_1(2k)$ ,  $8 \mid c_2(2k)$ ,  $2^{2i} \mid c_j(2k)$  и при  $k > 1$

$$\binom{2k+1}{2} - 3k > 0.$$

Поэтому из предположения индукции следует, что  $2^{-3k}\mathcal{F}_{2k}(q)$  имеет целые коэффициенты. Кроме того, поскольку  $16 \nmid c_2(2k)$ , то

$$2^{-3k}\mathcal{F}_{2k}q \equiv 2^{-3k+3}\mathcal{F}_{2k-2}(q) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} q^{2j+1} \pmod{2}.$$

Теперь по теореме 10.1 имеем

$$\begin{aligned} 2^{-3k-2} \mathcal{F}_{2k+1}(q) + 2^{-3k-2} c_1(2k+1) \mathcal{F}_{2k}(q) + \\ + 2^{-3k-2} c_2(2k+1) \mathcal{F}_{2k-1}(q) + \\ + \sum_{j=3}^{2k-1} 2^{-3k-3} c_j(2k+1) \mathcal{F}_{2k+1-j}(q) = \frac{2^{\binom{2k+2}{2} - 3k - 2} q G(q)}{(1-q)^{2k+3}}. \end{aligned}$$

И вновь по теореме 10.1  $16 \mid c_1(2k+1)$ ,  $8 \mid c_2(2k+1)$ ,  $2^j \mid c_j(2k)$  и для  $k > 1$

$$\binom{2k+2}{2} - 3k - 2 > 0.$$

Поэтому из индукционного предположения следует, что  $2^{-3k-2} \mathcal{F}_{2k+1}(q)$  имеет целые коэффициенты. Кроме того, поскольку  $16 \nmid c_2(2k+1)$ , то

$$2^{-3k-2} \mathcal{F}_{2k+1}(q) \equiv 2^{-3k+1} \mathcal{F}_{2k-1}(q) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} q^{2j+1} \pmod{2}.$$

Тем самым теорема 10.2 доказана.

### 10.3. Гипотеза Рамануджана для $5^n$

Прежде всего перефразируем гипотезу Рамануджана в терминах, более пригодных для использования производящих функций. В частности, получим общее семейство тождеств, в котором (10.1.3) будет одним из простейших. Помимо оператора Гекке  $U_5$ , нам также потребуется модулярное равенство пятого порядка, которое мы сформулируем в форме

$$\begin{aligned} \frac{q^5 (q^{25}; q^{25})_{\infty}^5}{(q)_{\infty}^5} = \frac{q^5 (q^{25}; q^{25})_{\infty}^6}{(q^5; q^5)_{\infty}^6} \left( 5^2 \frac{q^4 (q^{25}; q^{25})_{\infty}^4}{(q)_{\infty}^4} + 5^2 \frac{q^3 (q^{25}; q^{25})_{\infty}^3}{(q)_{\infty}^3} + \right. \\ \left. + 3 \cdot 5 \frac{q^2 (q^{25}; q^{25})_{\infty}^2}{(q)_{\infty}^2} + 5 \frac{q (q^{25}; q^{25})_{\infty}}{(q)_{\infty}} + 1 \right). \quad (10.3.1) \end{aligned}$$

За доказательством этого результата мы отсылаем читателя к [9, с. 119, равенство (2.5)]. Для упрощения обозначений полагаем

$$\varphi(q) = \frac{q (q^{25}; q^{25})_{\infty}}{(q)_{\infty}}, \quad (10.3.2)$$

$$g(q) = \frac{q (q^5; q^5)_{\infty}^6}{(q)_{\infty}^6}. \quad (10.3.3)$$



Таким образом, в новых обозначениях можно переписать (10.3.1) в виде

$$\varphi(q)^5 = g(q^5) \{5^2 \varphi(q)^4 + 5^2 \varphi(q)^3 + 3 \cdot 5 \varphi(q)^2 + 5 \varphi(q) + 1\}. \quad (10.3.4)$$

В последующих теоремах нам пригодится равенство

$$S_r = 5U_5 \varphi^r(q) = \sum_{i=0}^4 \varphi^r(q^{1/5} \rho^i), \quad (10.3.5)$$

где  $\rho = e^{2\pi i/5}$ . Понадобится нам также и понятие 5-адической нормы.

**О п р е д е л е н и е 10.1.** Если  $r \neq 0$  — рациональное число, то по фундаментальной теореме арифметики  $r$  однозначно представимо в виде  $\pm p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ , где  $p_i$  — простые, а  $a_i$  — целые (положительные, отрицательные или нули). 5-адическая норма  $v(r)$  числа  $r$  определяется как показатель при 5 в таком представлении  $r$ .

**Л е м м а 10.3.** Для каждого положительного целого  $r$  выражение

$$S_r = \sum_{j=1}^{\infty} a_{rj} g^j(q)$$

есть многочлен по  $g(q)$ , где 5 делит каждый коэффициент  $a_{rj}$ ,  $v(a_{rj}) \geq [(5j - r + 1)/2]$  и  $a_{rj} = 0$  всюду, кроме  $[(r + 4)/5] \leq j \leq r$ ; здесь  $[x]$  — целая часть  $x$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Зафиксируем некоторое  $q$  и рассмотрим многочлен пятой степени от  $u$  вида

$$u^5 - g(q)(5^2 u^4 + 5^2 u^3 + 3 \cdot 5 u^2 + 5u + 1) = 0. \quad (10.3.6)$$

Из (10.3.4) следует, что  $u = \varphi(q^{1/5})$  — корень, но, более того, корнями (10.3.6) являются  $u = \varphi(q^{1/5} \rho^j)$ , где  $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ,  $\rho = e^{2\pi i/5}$ , поскольку замена  $q$  на  $\rho^j q$  в (10.3.4) только переставляет  $\varphi(q)$ . Помимо того, поскольку 1 есть коэффициент при  $q$  в  $\varphi(q)$  (согласно (10.3.2)), видим, что  $\varphi(q^{1/5} \rho^j)$  — все различные функции от  $q$  и различные как комплексные числа для  $q$ , достаточно близкого к нулю, поскольку  $\varphi(q) \sim q$  при  $q \rightarrow 0$ . Значит, мы определили пять различных корней (10.3.6), когда  $q$  — достаточно малое комплексное число; поэтому

$$\prod_{i=0}^4 (u - \varphi(q^{1/5} \rho^i)) = u^5 - g(q)(5^2 u^4 + 5^2 u^3 + 3 \cdot 5 u^2 + 5u + 1). \quad (10.3.7)$$

Имеется аналитическое продолжение (10.3.7) для всех  $q$ ,  $|q| < 1$ .

Обратимся теперь к формуле Ньютона, связывающей суммы степеней корней многочлена с его коэффициентами. Именно, если

$$f(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n = \\ = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

и если

$$s_m = r_1^m + r_2^m + \dots + r_n^m,$$

то для  $1 \leq j \leq n$

$$s_j - a_1 s_{j-1} + a_2 s_{j-2} - \dots + (-1)^{j-1} a_{j-1} s_1 + (-1)^n a_j j = 0,$$

а для  $j > n$

$$s_j - a_1 s_{j-1} + a_2 s_{j-2} - \dots + (-1)^j a_j s_{j-n} = 0.$$

Применяя формулу Ньютона к  $f(x)$ , находим (в силу того, что  $S_r$  — это сумма  $r$ -х степеней корней многочлена из (10.3.6))

$$S_1 = 5^2 g(q), \quad (10.3.8)_1$$

$$S_2 = 5^4 g^2(q) + 2 \cdot 5^2 g(q), \quad (10.3.8)_2$$

$$S_3 = 5^6 g^3(q) + 3 \cdot 5^4 g^2(q) + 9 \cdot 5 g(q), \quad (10.3.8)_3$$

$$S_4 = 5^8 g^4(q) + 4 \cdot 5^6 g^3(q) + 22 \cdot 5^3 g^2(q) + 4 \cdot 5 g(q), \quad (10.3.8)_4$$

$$S_5 = 5^{10} g^5(q) + 5 \cdot 5^8 g^4(q) + 40 \cdot 5^5 g^3(q) + \\ + 20 \cdot 5^{-3} g^2(q) + 5 g(q), \quad (10.3.8)_5$$

а для  $r > 5$

$$S_r = 5^2 g(q) S_{r-1} + 5^2 g(q) S_{r-2} + 3 \cdot 5 g(q) S_{r-3} + \\ + 5 g(q) S_{r-4} + g(q) S_{r-5}. \quad (10.3.8)_r$$

Теперь все утверждения леммы 10.3 можно легко проверить непосредственно; единственное, что требует некоторой аккуратности, — это неравенство для  $v(a_{rj})$ , которое легко проверяется индукцией по  $r$ . Для  $1 \leq r \leq 5$  нужно лишь проверить точную форму тождеств для  $S_r$ . А для  $r > 5$  предполагаем, что  $v(a_{sj}) \geq \lceil (5j - s + 1)/5 \rceil$  для  $s < r$ , и проверяем (10.3.8)<sub>r</sub>:

$$a_{rj} = 5^2 a_{r-1, j-1} + 5^2 a_{r-2, j-1} + 15 a_{r-3, j-1} + 5 a_{r-4, j-1} + a_{r-5, j-1}.$$

Стало быть,

$$v(a_{rj}) \geq \min(v(a_{r-1, j-1}) + 2, v(a_{r-2, j-1}) + 2, \\ v(a_{r-3, j-1}) + 1, v(a_{r-4, j-1}) + 1, v(a_{r-5, j-1})) = \\ = \min\left(\left\lceil \frac{5j - r + 1}{5} \right\rceil, \left\lceil \frac{5j - r + 2}{5} \right\rceil, \left\lceil \frac{5j - r + 1}{5} \right\rceil, \right. \\ \left. \left\lceil \frac{5j - r + 2}{5} \right\rceil, \left\lceil \frac{5j - r + 1}{5} \right\rceil\right) = \left\lceil \frac{5j - r + 1}{5} \right\rceil.$$

Тем самым лемма 10.3 доказана.

Теперь мы полностью подготовлены к доказательству гипотезы Рамануджана для степеней пятерки. В этом специальном случае она имеет следующий вид:

Если  $24\lambda \equiv 1 \pmod{5^a}$ , то  $p(\lambda) \equiv 0 \pmod{5^a}$ .

Заметим, что наименьшее положительное решение сравнения  $24\lambda \equiv 1 \pmod{5^a}$  имеет вид

$$c_a = \begin{cases} \frac{1}{24}(19 \cdot 5^{2r-1} + 1), & a = 2r - 1, \\ \frac{1}{24}(23 \cdot 5^{2r} + 1), & a = 2r. \end{cases}$$

Следовательно, нам достаточно показать, что

$$p(5^a m + c_a) \equiv 0 \pmod{5^a}$$

при каждом  $m \geq 0$ .

В свете результатов § 10.2 было бы естественно предполагать, что наши интересы сконцентрированы на

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(5^a m + c_a) q^m = U_5 \sum_{m=0}^{\infty} p(5^{a-1} m + c_a) q^m,$$

однако, как это ясно при использовании модулярного равенства, мы должны рассматривать

$$L_{2n-1}(q) = (q^5; q^5)_{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p(5^{2n-1} m + c_{2n-1}) q^{m+1}, \quad (10.3.9)$$

$$L_{2n}(q) = (q)_{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p(5^{2n} m + c_{2n}) q^{m+1}. \quad (10.3.10)$$

Следующая теорема несет большую информацию о коэффициентах в  $L_n(q)$ , а гипотеза Рамануджана о степенях пятерки становится простым ее следствием.

**Т е о р е м а 10.4.** Каждая функция  $L_n(q)$  является многочленом от  $g(q)$  (10.3.3) с целыми коэффициентами, причем если

$$L_n(q) = \sum_{s=0}^{\infty} b_{ns} g^s(q), \text{ то} \quad b_{n0} = 0, \quad (10.3.11)$$

$$v(b_{n1}) = n, \quad (10.3.12)$$

$$v(b_{ns}) \geq n \text{ для всех } s \geq 1. \quad (10.3.13)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Доказательство, проводимое индукцией по  $n$ , во многом схоже с доказательством теоремы 10.1. Первая сложность проявляется в особенностях двухстрочного определения  $L_n(q)$  (равенства (10.3.9) и (10.3.10) принуждают нас изменять форму решений сравнения  $24\lambda \equiv 1 \pmod{5^a}$ ). Кроме

того, нам приходится доказывать утверждение, более сильное, чем (10.3.13); именно,

$$v(b_{ns}) \geq n + \left[ \frac{1}{4}(10s - 9 + (-1)^n) \right]. \quad (10.3.13)'$$

Когда  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned} L_1(q) &= (q^5; q^5)_\infty \sum_{m=0}^{\infty} p(5m+4) q^{m+1} = \\ &= (q^5; q^5)_\infty U_5 \sum_{m=1}^{\infty} p(m-1) q^m = (q^5; q^5)_\infty U_5 \frac{q}{(q)_\infty} = \\ &= U_5 \frac{q(q^{25}; q^{25})_\infty}{(q)_\infty} = \\ &= (\text{так как } U_5 f_1(q^5) f_2(q) = f_1(q) U_5 f_2(q)) = \\ &= U_5 \varphi(x) = \frac{1}{5} S_1 \stackrel{(10.3.8)_1}{=} 5g(q). \end{aligned} \quad (10.3.14)$$

Поэтому  $b_{10} = 0$ ,  $b_{11} = 5$ ,  $b_{1s} = 0$  для  $s > 1$  и равенства (10.3.11), (10.3.12) и (10.3.13) тем самым выполнены, когда  $n = 1$ .

Предположим теперь, что наша теорема верна для каждого целого  $n \leq 2r - 1$ . Мы должны показать, что это так и для  $n = 2r$ , и  $n = 2r + 1$ . Согласно (10.3.9)

$$\begin{aligned} L_{2r}(q) &= (q)_\infty \sum_{m=0}^{\infty} p(5^{2r}m + c_{2r}) q^{m+1} = \\ &= (q)_\infty \sum_{m=0}^{\infty} p(5^{2r}m + 4 \cdot 5^{2r-1} + c_{2r-1}) q^{m+1} = \\ &= (q)_\infty \sum_{m=0}^{\infty} p(5^{2r-1}(5m+4) + c_{2r-1}) q^{m+1} = \\ &= U_5 L_{2r-1}(q) = U_5 \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r-1, s} g^s(q) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r-1, s} U_5(g^s(q)) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r-1, s} U_5 \left( \frac{q^s (q^5; q^5)_\infty^{6s}}{(q)_\infty^{6s}} \right) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r-1, s} \frac{(q)_\infty^{6s}}{q^s (q^5; q^5)_\infty^{6s}} U_5 \varphi^{6s}(q) \stackrel{(10.3)}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r-1,s} \frac{1}{g^s(q)} \frac{1}{5} \sum_{j=1}^{\infty} a_{6s,j} g^j(q) = \\
&= \sum_{t=-\infty}^{\infty} g^t(q) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{5} b_{2r-1,s} a_{6s,t+s} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} g^t(q) b_{2r,t}, \quad (10.3.15)
\end{aligned}$$

где

$$b_{2r,t} = \frac{1}{5} \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r-1,s} a_{6s,t+s}. \quad (10.3.16)$$

Теперь можно вывести (10.3.11), (10.3.12) и (10.3.13)' для  $b_{2r,t}$  из (10.3.16), используя лемму 10.3 (свойства  $a_{6s,t+s}$ ) и индукционные предположения (для  $b_{2r-1,s}$ ). В частности, если  $t \leq 0$ , то  $t+s \leq s$  и, значит, по лемме 10.3  $a_{6s,t+s} = 0$  для  $s > 0$ , поскольку

$$\left[ \frac{6s+4}{5} \right] > s \geq t+s.$$

По индукционному предположению  $b_{2r-1,0} = 0$ . Поэтому видим, что  $b_{2r,t} = 0$ , если  $t \leq 0$ , что и подтверждает (10.3.11), когда  $n = 2r$ .

Кроме того, поскольку  $L_{2r-1}(q)$  есть (по предположению) многочлен от  $g(q)$ , видим, что  $b_{2r-1,s} = 0$  для  $s \geq s_0(r)$ . Также по лемме 10.3  $a_{6s,t+s} = 0$  всюду, кроме  $t \leq 5s$ . Поэтому, если  $t \geq 5s_0(r)$ , то один из сомножителей в каждом члене в (10.3.16) равен нулю, значит,  $b_{2r,t} = 0$  для достаточно большого  $t$ . Стало быть,  $L_{2r}(q)$  — многочлен от  $g(q)$ . Далее,

$$b_{2r,1} = \frac{1}{5} \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r-1,s} a_{6s,s+1} = \frac{1}{5} b_{2r-1,1} a_{6,2} \stackrel{(10.3.8)_2}{=} b_{2r-1,1} 5 \cdot 63.$$

Поэтому согласно индукционному предположению

$$v(b_{2r,1}) = v(b_{2r-1,1}) + 1 = 2r$$

и, значит, (10.3.12) выполняется для  $n = 2r$ .

Наконец, для  $t \geq 1$  согласно (10.3.16), лемме 10.3 и (10.3.13)' с  $n = 2r - 1$  имеем

$$\begin{aligned}
v(b_{2r,t}) &\geq -1 + \min_{\substack{\left[ \frac{s+4}{5} \right] \leq t \leq 5s \\ s \geq 1}} v(b_{2r-1,s} a_{6s,t+s}) = \\
&= -1 + \min_{\substack{\left[ \frac{s+4}{5} \right] \leq t \leq 5s \\ s \geq 1}} \left\{ 2r - 1 + \left[ \frac{5s-5}{2} \right] + \left[ \frac{5t-s+1}{2} \right] \right\} \geq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq -1 + \left\{ 2r - 1 + \left[ \frac{5s-5}{2} \right] + \left[ \frac{5t-s+1}{2} \right] \right\} \Big|_{s=1} = \\ &= 2r - 2 + \left[ \frac{5t}{2} \right] \geq 2r + \left[ \frac{5t-4}{2} \right], \end{aligned}$$

что и дает (10.3.13) для  $n = 2r$ .

Для завершения доказательства осталось доказать наши утверждения для  $n = 2r + 1$ , используя индукционные предположения и случай  $n = 2r$ . Поскольку путь рассуждений примерно тот же, детали мы опускаем; выводя аналог формулы (10.3.16), предоставляем читателю необходимые выводы из этого результата сделать самостоятельно. Имеем

$$\begin{aligned} L_{2r+1}(q) &= (q^5; q^5)_\infty \sum_{m=0}^{\infty} p(5^{2r+1}m + c_{2r+1}) q^{m+1} = \\ &= (q^5; q^5)_\infty \sum_{m=0}^{\infty} p(5^{2r}m + 3 \cdot 5^{2r} + c_{2r}) q^{m+1} = \\ &= (q^5; q^5)_\infty U_5 \sum_{m=0}^{\infty} p(5^{2r}m + c_{2r}) q^{m+2} = \\ &= U_5 \left\{ (q^{25}; q^{25})_\infty \sum_{m=0}^{\infty} p(5^{2r}m + c_{2r}) q^{m+2} \right\} = \\ &= U_5 \{ \varphi(q) L_{2r}(q) \} = U_5 \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r,s} \varphi(q) g^s(q) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r,s} U_5(\varphi(q) g^s(q)) = \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r,s} \frac{(q)_\infty^{6s}}{q^s (q^5; q^5)_{\infty}^{6s}} U_5(\varphi^{6s+1}(q)) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r,s} \frac{1}{g^s(q)} \frac{1}{5} S_{6s+1} \stackrel{(10.3)}{=} \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r,s} \frac{1}{g^s(q)} \frac{1}{5} \sum_{j=1}^{\infty} a_{6s+1,j} g^j(q) = \\ &= \sum_{t=-\infty}^{\infty} g^t(q) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{5} b_{2r,s} a_{6s+1,t+s}, \quad (10.3.17) \end{aligned}$$

откуда

$$b_{2r+1,t} = \frac{1}{5} \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r,s} a_{6s+1,t+s}. \quad (10.3.18)$$

Оставшаяся часть доказательства проводится в точности, как и при использовании (10.3.16).

**С л е д с т в и е 10.5** (гипотеза Рамануджана для степеней числа 5). *Если  $24\lambda \equiv 1 \pmod{5^n}$ , то  $p(\lambda) \equiv 0 \pmod{5^n}$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно замечаниям, предшествовавшим теореме 10.4, достаточно показать, что  $p(5^a m + c_a) \equiv 0 \pmod{5^a}$  для каждого  $m \geq 0$ . Если  $a = 2n - 1$ , то

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(5^{2n-1}m + c_{2n-1})q^{m+1} = \frac{L_{2n-1}(q)}{(q^5; q^5)_{\infty}} = \sum_{s=1}^{\infty} b_{2n-1, s} \frac{g^s(q)}{(q^5; q^5)_{\infty}}. \quad (10.3.19)$$

Выражение  $g^s(q)/(q^5; q^5)_{\infty}$  всегда есть степенной ряд по  $q$  с целыми коэффициентами, и по теореме 10.4  $5^{2n-1} \mid b_{2n-1, s}$  для каждого  $s$ . Поэтому коэффициент при  $q^{m+1}$  в правой части (10.3.19) делится на  $5^{2n-1}$ , стало быть,

$$5^{2n-1} \mid p(5^{2n-1}m + c_{2n-1}).$$

Те же рассуждения проходят и в случае  $a = 2n$ , с той лишь разницей, что  $(q^5, q^5)_{\infty}$  заменяется на  $(q)_{\infty}$ .

**С л е д с т в и е 10.6.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n + 4)q^n = \frac{5(q^5; q^5)_{\infty}^5}{(q)_{\infty}^6}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Это есть перефразировка равенства (10.3.14).

Естественно теперь задаться вопросом: существуют ли какие-нибудь комбинаторные интерпретации для таких сравнений? Два из них, именно (10.1.1) и (10.1.2), обладают таковыми интерпретациями, но уже ни для какого другого сравнения комбинаторные интерпретации неизвестны. Следующая теорема, первоначально сформулированная Дайсоном в качестве гипотезы и доказанная в [4], дает все известные интерпретации.

**Т е о р е м а 10.7.** Пусть  $R(k, a; n)$  — число разбиений, первый ранг которых (см. § 9.3) сравним с  $a$  по модулю  $k$ . Тогда

$$\begin{aligned} R(5, 0; 5m + 4) &= R(5, 1; 5m + 4) = \\ &= R(5, 2; 5m + 4) = R(5, 3; 5m + 4) = R(5, 4; 5m + 4), \\ R(7, 0; 7m + 5) &= R(7, 1; 7m + 5) = R(7, 2; 7m + 5) = \\ &= R(7, 3; 7m + 5) = R(7, 4; 7m + 5) = \\ &= R(7, 5; 7m + 5) = R(7, 6; 7m + 5). \end{aligned}$$

Единственное имеющееся доказательство этой теоремы потребовало бы довольно много места. Следует отметить, что в основе своей это аналитическое доказательство, во многом опирающееся на свойство модулярных функций. Комбинаторное доказательство теоремы 10.7 неизвестно.

## Задачи

В задачах 1—6 представлены задачи для  $b(n; m)$ -разбиений  $n$  на степени числа  $m$ . В них используются следующие функции:

$$\Phi(m; q) = \sum_{n=0}^{\infty} b(m; n) q^n = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{m^n})^{-1},$$

$$\Gamma(m; q) = (1 - q) \Phi(m; q) = \Phi(m; q^m),$$

$$\Psi_r(m; q) = \sum_{n=0}^{\infty} (b(m; m^{r+1}n) - b(m; m^r n)) q^n;$$

заметим, что

$$\Psi_{r+1}(m; q) = U_m \Psi_r(m; q), \quad r > 0.$$

$$1. \quad \Psi_0(m; q) = \frac{q \Gamma(m; q)}{(1 - q)^2}.$$

$$2. \quad \Psi_1(m; q) = \frac{m \Gamma(m; q) q}{(1 - q)^3}.$$

$$3. \quad \Psi_2(m; q) + \binom{m}{2} \Psi_1(m; q) = \frac{m^3 \Gamma(m; q) q}{(1 - q)^4}.$$

$$4. \quad \Psi_3(m; q) + \binom{m}{2} (2m + 1) \Psi_2(m; q) + \\ + \left( 2m \binom{m}{2}^2 - m^3 \binom{m}{2} + 2m^2 \binom{m+1}{3} \right) \Psi_1(m; q) = \\ = \frac{m^6 \Gamma(m; q) q}{(1 - q)^5}.$$

5. Доказать, что существуют целые  $a_i(r)$  ( $= a_i(m; r)$ ) такие, что

$$\sum_{i=0}^{r-1} a_i(r) \Psi_{r-i}(m; q) = \frac{m^{\binom{r+1}{2}} G(m; q) q}{(1 - q)^{r+2}},$$

где  $a_0(r) = 1$ ,  $m \mid a_1(r)$ , если  $m$  нечетно,  $\frac{1}{2}m \mid a_1(r)$ , если  $m$  четно, и  $m^{2j-2} \mid a_j(r)$  при  $2 \leq j \leq r-1$ .

6. Положим  $\mu = m$ , если  $m$  нечетно, и  $\mu = m/2$ , если  $m$  четно. Тогда показать, что

$$b(m; m^{r+1}n) - b(m; m^r n) \equiv 0 \pmod{\mu^r}.$$

В задачах 7—13 кратко представлено простейшее известное доказательство того, что  $5 \mid p(5n + 4)$ .

7. Из тождества Якоби (теорема 2.8) вывести тождество

$$(q)_{\infty}^3 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m + 1) q^{m(m+1)/2}.$$

8. Доказать, что для  $-\infty < r < \infty$ ,  $s \geq 0$  выражение  $1 + \frac{1}{2}r(3r + 1) + \frac{1}{2}s(s + 1)$  делится на 5 тогда и только тогда, когда  $r \equiv 4 \pmod{5}$  и  $s \equiv 2 \pmod{5}$ .



9. Из задач 7, 8 и тривиального тождества  $q(q)_\infty^4 = q(q)_\infty^3(q)_\infty$  вывести, что коэффициент при  $q^{5m+5}$  в  $q(q)_\infty^4$  кратен 5.

10. Считая, что  $f(q) \equiv g(q) \pmod{5}$ , если  $a_n \equiv b_n \pmod{5}$  при всех  $n$ , где  $f(q) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$  и  $g(q) = \sum_{n \geq 0} b_n q^n$ , показать, используя биномиальные ряды, что

$$\frac{1 - q^5}{(1 - q)^5} \equiv 1 \pmod{5}.$$

11. Из задачи 10 видно, что

$$\frac{(q^5; q^5)_\infty}{(q)_\infty^5} \equiv 1 \pmod{5}.$$

12. Задачи 9 и 11 влекут, что коэффициент при  $q^{5m+5}$  в  $(q(q^5; q^5)_\infty)/(q)_\infty$  кратен 5.

13. Из задачи 12 следует, что  $5 \mid p(5m+4)$  при всех  $m \geq 0$ .

### З а м е ч а н и я

Как уже отмечалось в § 10.1, наиболее читабельным и полным руководством по свойствам делимости функции  $p(n)$  служит книга [9]. Результаты самого Рамануджана на эту тему в основном содержатся в [15, P25]. Работа [2] содержит полностью случай  $11^n$ ; случаи  $5^n$  и  $7^n$  впервые были полностью исследованы в [17].

В [3] и иных местах (см. [12]) широко изучались арифметические свойства модулярных форм; например, в [3] показано, что

$$p(206\,839n + 2623) \equiv 0 \pmod{17}.$$

Материал по бинарным разбиениям взят из [16, 7]; мы в своем изложении придерживались [1]. Теорема 10.2 в качестве гипотезы сформулирована в [5].

В [10, 11] предложена элегантная элементарная техника для доказательства сравнений типа (10.1.1) и (10.1.2); в [14] дается хорошее изложение этой техники и некоторых результатов из [10, 11].

О следствии 10.6 (принадлежащем Рамануджану) Харди в своей книге «Рамануджан» пишет: «Было бы трудно отыскать формулу более красивую, нежели тождества Роджерса—Рамануджана..., но здесь Рамануджан должен отдать первенство профессору Роджерсу; а если бы я выбирал красивейшую формулу из всех результатов Рамануджана, то в этом выборе согласился бы с майором Мак-Магоном, останавливаясь на тождестве

$$p(4) + p(9)x + p(14)x^2 + \dots = \frac{5 \{(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15}) \dots\}^5}{\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots\}^6},$$

где  $p(n)$  — число разбиений  $n$ .

Недавние работы по делимости функций разбиений см. в [13, P76]. Задачи 1—6 — [5, 16, 1, 8]; задачи 7—13 — [15, P25].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Andrews G. E. (1971). Congruence properties of the  $m$ -ary partition function. — J. Number Theory **3**, p. 104—110.
2. Atkin A. O. L. (1967). Proof of a conjecture of Ramanujan. — Glasgow Math. J. **8**, p. 14—32.

3. Atkin A. O. L. (1969). Congruence Hecke operators. — Proc. Symp. Pure Math. **12**, p. 33—40.
4. Atkin A. O. L., Swinnerton-Dyer H. P. E. (1953). Some properties of partitions. — Proc. London Math. Soc. (3) **4**, p. 84—106.
5. Churchhouse R. F. (1969). Congruence properties of the binary partition function, Proc. Cambridge Phil. Soc. **66**, p. 371—376.
6. Dyson F. J. (1944). Some guesses in the theory of partitions. — Eureka (Cambridge) **8**, p. 10—15.
7. Gupta H. (1971). Proof of the Churchhouse conjecture concerning binary partitions. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **70**, p. 53—56.
8. Gupta H. (1972). On  $m$ -ary partitions. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **71**, p. 343—345.
9. Knopp M. I. (1970). Modular Functions in Analytic Number Theory. — Markham, Chicago.
10. Kolberg O. (1957). Some identities involving the partition function. — Math. Scand. **5**, p. 77—92.
11. Kolberg O. (1960). Congruences involving the partition function for the moduli 17, 19, and 23. — Univ. Bergen Årbok Naturvit. Rekke 1959, № 15, p. 10.
12. Lehner J. (1969). Lectures on Modular Forms (Appl. Math. Ser. № 61). — Nat. Bur. Standards, Washington, D. C.
13. LeVeque, W. J. (1974). Reviews in Number Theory, Vol. 4. — Amer. Math. Soc., Providence, R. I.
14. Rademacher H. (1973). Topics in Analytic Number Theory. — Springer, Berlin.
15. Ramanujan S. (1927). Collected Papers of S. Ramanujan. — Cambridge Univ. Press, London and New York (reprinted by Chelsea, New York).
16. Rødseth O. (1970). Some arithmetical properties of  $m$ -ary partitions. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **68**, p. 447—453.
17. Watson G. N. (1938). Ramanujans Vermutung über Zerfallungsanzahlen. — J. reine angew. Math. **179**, p. 97—128.

## МНОГОМЕРНЫЕ РАЗБИЕНИЯ

### 11.1. Введение

В предшествующих главах (за исключением гл. 4) разбиения рассматривались как однострочная таблица с предписанной суммой своих элементов:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_s = \sum_{i=1}^s n_i, \quad n_i \geq n_{i+1}.$$

В этой главе изучаются *многомерные разбиения* числа, т. е. таблицы, сумма элементов которых равна  $n$ :

$$n = \sum_{i_1, \dots, i_r \geq 0} n_{i_1 i_2 \dots i_r}, \quad \text{где } n_{i_1 i_2 \dots i_r} \geq n_{j_1 j_2 \dots j_r}, \quad (11.1.1)$$

всякий раз, как  $i_1 \leq j_1, i_2 \leq j_2, \dots, i_r \leq j_r$  (все  $n_{i_1 i_2 \dots i_r}$  — целые неотрицательные числа).

Примечательно, что наибольший интерес представляют собой случаи, когда размерность равна 1 или 2, и намного меньший интерес — случаи размерностей, превосходящих 2. В § 11.2 излагается доказательство Карлитца фундаментальной теоремы Мак-Магона, использующее детерминантное представление соответствующих производящих функций; рекуррентный подход, используемый здесь, проявляется также и в гл. 12 при рассмотрении векторных разбиений.

В § 11.3 изучается фундаментальный алгоритм Кнута, обеспечивающий доказательство ряда теорем о плоских разбиениях.

В § 11.4 рассматриваются вопросы, относящиеся к многомерным разбиениям. К сожалению, большинство результатов этого параграфа носит негативный характер. В частности, показана несостоятельность предположительной формы производящей функции многомерных разбиений.

### 11.2. Плоские разбиения

Из предыдущего параграфа видно, что плоские разбиения числа  $n$  — это двумерные таблицы из неотрицательных целых в первом квадранте, удовлетворяющие «невозрастающему» усло-

вию по строкам и столбцам. Например, имеются шесть плоских разбиений числа 3:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

При записи можно опускать нули:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ 3, & 21, & 2, & 111, & 11 & 1 & \end{array}$$

Отметим, что плоские разбиения иногда представляют не в первом, а в четвертом квадранте; плоские разбиения 3 в нем принимают вид

$$\begin{array}{ccccccc} 3, & 21, & 2, & 111, & 11, & 1 & \\ & & & 1 & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 \end{array}$$

Использование первого квадранта несколько упрощает оперирование с высокоразмерными разбиениями.

**О п р е д е л е н и е 11.1.** Пусть  $\pi_r(n_1, n_2, \dots, n_k; q)$  обозначает производящую функцию для плоских разбиений не более чем с  $r$  столбцами, не более чем с  $k$  строками и с  $n_i$  как первым элементом в  $i$ -й строке.

Оперирование с функцией  $\pi_r$  потребует привлечения многочленов Гаусса, о которых см. в § 3.3.

Начнем с замечания, что функция  $\pi_r$  полностью определяется следующими рекуррентными и начальными условиями:

$$\begin{aligned} \pi_{r+1}(n_1, n_2, \dots, n_k; q) = \\ = q^{n_1+n_2+\dots+n_k} \sum_{m_k=0}^{n_k} \sum_{m_{k-1}=m_k}^{n_{k-1}} \dots \sum_{m_1=m_2}^{n_1} \pi_r(m_1, \dots, m_k; q), \end{aligned} \quad (11.2.1)$$

$$\pi_1(n_1, n_2, \dots, n_k; q) = q^{n_1+n_2+\dots+n_k}. \quad (11.2.2)$$

Равенство (11.2.2) очевидно, а равенство (11.2.1) легко устанавливается проверкой таблицы, получаемой удалением первого столбца  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  из некоторой таблицы с  $r+1$  столбцами.

Заметим, что функция  $\pi_r$  легко вычисляется посредством (11.2.1) и (11.2.2). Например,

$$\begin{aligned}
 \pi_2(n, m; q) &= \\
 &= q^{n+m} \sum_{m_1=0}^m \sum_{n_1=m_1}^n q^{n_1+m_1} = q^{n+m} \sum_{m_1=0}^m q^{m_1} \frac{q^{m_1} - q^{n+1}}{1 - q} = \\
 &= q^{n+m} \left( \frac{1 - q^{2m+2}}{1 - q^2} - q^{n+1} \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} \right) = \\
 &= q^{n+m} \left[ \frac{(1 - q^{n+1})(1 - q^{m+1})}{(1 - q)^2} - q \frac{(1 - q^{m+1})(1 - q^m)}{(1 - q)(1 - q^2)} \right] = \\
 &= q^{n+m} \left( \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m+1 \\ 1 \end{bmatrix} - q \begin{bmatrix} m+1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = q^{n+m} \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} & q \begin{bmatrix} m+1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} m+1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{11.2.3}$$

Можно теперь применить (11.2.3) к правой части (11.2.1) при  $r = 2$ ; используя (3.3.9), легко выводим, что

$$\pi_3(n, m; q) = q^{n+m} \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} n+2 \\ 2 \end{bmatrix} & q \begin{bmatrix} m+2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n+2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} m+2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{vmatrix}.$$

Отсюда естественно предположить

$$\pi_r(n, m; q) = q^{n+m} \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} n+r-1 \\ r-1 \end{bmatrix} & q \begin{bmatrix} m+r-1 \\ r \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n+r-1 \\ r-2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \end{vmatrix},$$

что легко доказывается индукцией по  $r$  с использованием (3.3.9).

После некоторых вычислений с  $k = 3$  возникает естественное общее предположение о представлении функции  $\pi_r$  детерминантом.

**Т е о р е м а 11.1.**

$$\pi_r(n_1, n_2, \dots, n_k; q) = q^{n_1 + \dots + n_k} \det \left( q^{(i-j)(i-j-1)/2} \begin{bmatrix} n_j + r - 1 \\ r - i + j - 1 \end{bmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq k}. \tag{11.2.4}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Когда  $r = 1$ , определитель имеет вид верхнетреугольной матрицы с единицами ниже главной диагонали. Поэтому в этом случае (11.2.4) принимает тривиальный вид (11.2.2).

Предполагая, что требуемое верно для  $r$ , применим (11.2.1), используя индукционное предположение:

$$\begin{aligned} q^{-n_1 - \dots - n_k} \pi_{r+1}(n_1, n_2, \dots, n_k; q) = \\ = \sum_{m_k=0}^{n_k} \sum_{m_{k-1}=m_k}^{n_{k-1}} \dots \sum_{m_1=m_2}^{n_1} q^{m_1 + m_2 + \dots + m_k} \times \\ \times \det \left( q^{(i-j)(i-j-1)/2} \begin{bmatrix} m_j + r - 1 \\ r - 1 + j - 1 \end{bmatrix} \right). \quad (11.2.5) \end{aligned}$$

Произведем внутреннее суммирование, используя (3.3.9). В результате правая часть преобразуется к  $(k-1)$ -кратному суммированию детерминанта, у которого  $i$ -й элемент в первом столбце заменен на

$$q^{(i-j)(i-4)/2} \left( \begin{bmatrix} n_1 + r \\ r - i + 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_2 + r - 1 \\ r - i + 1 \end{bmatrix} \right),$$

в то время как не изменившийся  $i$ -й элемент второго столбца имеет вид

$$q^{(i-2)(i-3)/2} \begin{bmatrix} m_2 + r - 1 \\ r - i + 1 \end{bmatrix};$$

поэтому, если умножить второй столбец на  $q^{-1}$  и прибавить к первому, то  $i$ -й элемент таким образом преобразованного первого столбца имеет вид

$$q^{(i-1)(i-4)/2} \begin{bmatrix} n_1 + r \\ r - i + 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь, суммируя по  $m_2$ , умножим третий столбец на  $q^{-2}$  и прибавим его к нашему новому второму столбцу;  $i$ -й элемент после этого принимает вид

$$q^{(i-2)(i-5)/2} \begin{bmatrix} n_2 + r \\ r - i + 2 \end{bmatrix}.$$

Вообще, суммируя на  $j$ -м шаге по  $m_j$ , умножаем  $(j+1)$ -й столбец на  $q^{-j}$  и прибавляем его к  $j$ -му столбцу. Получаемый  $j$ -й столбец своим  $i$ -м элементом имеет

$$q^{(i-j)(i-j-3)/2} \begin{bmatrix} n_j + r \\ r - i + j \end{bmatrix}.$$

Поэтому после суммирования имеем

$$q^{-n_1 - \dots - n_k} \pi_{r+1}(n_1, n_2, \dots, n_k; q) = \det \left( q^{(i-j)(i-j-3)/2} \begin{bmatrix} n_j + r \\ r - i + j \end{bmatrix} \right). \quad (11.2.6)$$

Если умножить  $i$ -ю строку определителя из (11.2.6) на  $q^{i-1}$  и разделить  $j$ -й столбец на  $q^{i-1}$  (значит, значение детерминанта не изменится), то получим

$$q^{-n_1 \cdots -n_k} \pi_{r+1}(n_1, n_2, \dots, n_k; q) = \det \left( q^{(i-k)(i-j-1)/2} \begin{bmatrix} n_i + r \\ r - i + j \end{bmatrix} \right), \quad (11.2.7)$$

что и дает (11.2.4) при замене  $r$  на  $r+1$ . Тем самым теорема доказана.

**О п р е д е л е н и е 11.2.** Пусть  $p_{k,r}(m, n)$  обозначает число плоских разбиений  $m$  не более чем с  $r$  столбцами, не более чем с  $k$  строками и элементами, не превосходящими  $n$ ; пусть, кроме того,

$$\pi_{k,r}(n; q) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{k,r}(m, n) q^m.$$

Сразу заметим, что согласно (11.2.1)

$$\begin{aligned} \pi_{k,r}(n; q) &= \sum_{n_k \leq \dots \leq n_1 \leq n} \pi_r(n_1, n_2, \dots, n_k; q) = \\ &= q^{-kn} \pi_{r+1}(n, \dots, n; q). \end{aligned} \quad (11.2.8)$$

Поэтому

$$\pi_{k,r}(n; q) = \det \left( q^{(i-j)(i-j-1)/2} \begin{bmatrix} n + r \\ r - i + j \end{bmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq k}. \quad (11.2.9)$$

Оказывается, можно представить многочлен  $\pi_{k,r}(n; q)$  как простое отношение произведений  $(q)_j$ . Это весьма просто сделать прямым вычислением при малых  $k$ , что опять-таки подводит к общему предположению.

**Т е о р е м а 11.2.**

$$\pi_{k,r}(n; q) = \frac{(q)_1 (q)_2 \cdots (q)_{k-1}}{(q)_r (q)_{r+1} \cdots (q)_{r+k-1}} \cdot \frac{(q)_{n+r} (q)_{n+r+1} \cdots (q)_{n+r+k-1}}{(q)_n (q)_{n+1} \cdots (q)_{n+k-1}}. \quad (11.2.10)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Будем действовать, используя остроумный прием Карлитца. Пусть

$$W(k, r) = \det \left( q^{ri+i(i-1)/2} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix} \right)_{0 \leq i, j \leq k-1}.$$

Поэтому согласно правилу перемножения детерминантов

$$\pi_{k,r}(n; q) W(k, r) = \det (c_{ij})_{0 \leq i, j \leq k-1},$$

где согласно (3.3.10)

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{s=0}^j q^{s(s-1)/2} \begin{bmatrix} j \\ s \end{bmatrix} q^{rs + (i-s)(i-s-1)/2} \begin{bmatrix} n + r \\ n + i - s \end{bmatrix} = \\ &= q^{i(i-1)/2} \begin{bmatrix} n + r + j \\ n + i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} \pi_{k,r}(n; q) W(k, r) &= \\ &= \frac{(q)_{n+r} (q)_{n+r+1} \cdots (q)_{n+r+k-1}}{(q)_n (q)_{n+1} \cdots (q)_{n+k-1}} \det \left( \frac{q^{i(i-1)/2}}{(q)_{r-i+j}} \right) = \\ &= \frac{(q)_{n+r} (q)_{n+r+1} \cdots (q)_{n+r+k-1}}{(q)_n (q)_{n+1} \cdots (q)_{n+k-1}} C(k, r), \end{aligned} \quad (11.2.11)$$

где ни  $W(k, r)$  (матрица верхнетреугольна, с нулями по главной диагонали), ни  $C(k, r)$  не зависят от  $n$ . Можно, стало быть, определить  $C(k, r) / W(k, r)$ , полагая  $n = 0$  в (11.2.11). Таким образом,

$$\frac{C(k, r)}{W(k, r)} = \frac{(q)_1 (q)_2 \cdots (q)_{k-1}}{(q)_r (q)_{r+1} \cdots (q)_{r+k-1}} \quad (11.2.12)$$

и, значит,

$$\pi_{k,r}(n; q) = \frac{(q)_1 (q)_2 \cdots (q)_{k-1}}{(q)_r (q)_{r+1} \cdots (q)_{r+k-1}} \cdot \frac{(q)_{n+r} (q)_{n+r+1} \cdots (q)_{n+r+k-1}}{(q)_n (q)_{n+1} \cdots (q)_{n+k-1}}. \quad (11.2.13)$$

Теорема 11.2 сразу влечет известные формулы Мак-Магона для производящих функций  $k$ -строчных плоских разбиений  $\pi_{k,\infty}(\infty; q)$ .

**С л е д с т в и е 11.3.** При  $|q| < 1$  выполняются равенства

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{k,\infty}(m, \infty) q^m = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{-\min(k, j)}, \quad (11.2.14)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{\infty,\infty}(m, \infty) q^m = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{-j}. \quad (11.2.15)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Равенство (11.2.14) следует из теоремы 12.2 при  $r \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ , а равенство (11.2.15) следует из (11.2.14) при  $k \rightarrow \infty$  в (11.2.14).

### 11.3. Соответствие Кнута – Шенстеда

В 60-х годах Шенстедом исследовалось расширенное позже Кнудом соответствие между некоторыми матрицами и плоскими разбиениями. Это комбинаторное отображение позволило упростить вывод многих известных производящих функций плоских разбиений с ограничениями. Кроме того, за счет привлечения этого соответствия было исследовано много новых производящих функций.



**Теорема 11.4.** *Имеется взаимно однозначное соответствие между парами следующих множеств:*

1) множество  $k \times k$ -матриц  $A$  с неотрицательными целыми коэффициентами;

2) множество всех лексикографически упорядоченных последовательностей из упорядоченных пар целых, не превосходящих  $k$ :

3) множество упорядоченных пар  $(\pi, \pi')$  плоских разбиений, в которых имеется строгое убывание по столбцам, каждый элемент которых не превосходит  $k$ , а соответствующие строки  $\pi$  и  $\pi'$  имеют одинаковую длину.

Кроме того, оговариваемое соответствие таково, что сумма элементов в  $i$ -м столбце (соответственно  $i$ -я строчная сумма) матрицы  $A$  из множества 1) равна числу вхождений  $i$  в соответствующее плоское разбиение  $\pi$  (соответственно  $\pi'$ ) из 3).

**Доказательство.** Соответствие между 1) и 2) весьма просто; каждой последовательности из 2) ставим в соответствие матрицу инцидентности  $A = (a_{ij})$ , в которой  $a_{ij}$  — число вхождений пары  $(i, j)$  (записываемой нами, далее, как  $j_i$ ) в соответствующую последовательность из 2). Например,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{matrix} \quad (11.3.1)$$

Возьмем теперь упорядоченную пару плоских разбиений  $(\pi, \pi')$ ; разбиение  $\pi$  составляется из вторых элементов (т. е. нижней строки) из последовательности упорядоченных пар; разбиение  $\pi'$  составляется из первых элементов (верхней строки) из той же последовательности упорядоченных пар. Опишем алгоритм, по которому шаг за шагом строятся разбиения  $\pi$  и  $\pi'$  из последовательности пар множества 2).

Вторые элементы  $j$  из каждого члена  $j_i$  нашей последовательности пар размещаются по подходящим местам верхней строки разбиения  $\pi$  (подходящим в том смысле, что их расположение по строкам должно оставаться невозрастающим). Если место, предназначенное для  $j$ , уже содержит меньший элемент  $j_1$ , то  $j$  занимает место  $j_1$ , а элемент  $j_1$  сдвигается на вторую строку. Если же во второй строке место, предназначенное для  $j_1$ , уже занято элементом  $j_2$ , то на его место встает  $j_1$ , а  $j_2$  сдвигается на третью строку, и так далее. Если последовательность таких «сдвижек», производимая размещениями элементов  $j$ , закончена, то элементы  $i$  (верхние элементы пар  $j_i$ ) размещаются по  $\pi'$  так, чтобы соответствующие строки  $\pi$  и  $\pi'$  имели на каждом шаге одинаковую длину.

Для наилучшего представления механики этой процедуры приводим здесь ее пошаговый вид для построения  $(\pi, \pi')$  из последовательности пар (11.3.1) (число в кружке обозначает очередное

размещение, а подчеркнутые числа — это «сдвиги», порожденные очередным размещением).

③	③
3 ②	3 ③
3 2 ②	3 3 ③
3 2 2 ②	3 3 3 ③
3 2 2 2 ①	3 3 3 3 ③
3 2 2 2 1 ①	3 3 3 3 3 ③
3 ③ 2 2 1 1	3 3 3 3 3 3
<u>2</u>	②
3 3 2 2 ② 1	3 3 3 3 3 3
2 <u>1</u>	2 ②
3 3 2 2 2 1 ①	3 3 3 3 3 3 ②
2 1	2 2
3 3 ③ 2 2 1 1	3 3 3 3 3 3 2
2 <u>2</u>	2 2
<u>1</u>	①
3 3 3 ③ 2 1 1	3 3 3 3 3 3 2
2 2 <u>2</u>	2 2 ①
1	1
3 3 3 3 2 ② 1	3 3 3 3 3 3 2
2 2 2 <u>1</u>	2 2 1 ①
1	1
3 3 3 3 2 2 ②	3 3 3 3 3 3 2
2 2 2 1 <u>1</u>	2 2 1 1 ①
1	1
3 3 3 3 2 2 2 ①	3 3 3 3 3 3 2 ①
2 2 2 1 1	2 2 1 1 1
1	1
3 3 3 3 2 2 2 1 ①	3 3 3 3 3 3 2 1 ①
2 2 2 1 1	2 2 1 1 1
1	1
3 3 3 3 2 2 2 1 1 ①	3 3 3 3 3 3 2 1 1 ①
2 2 2 1 1	2 2 1 1 1
1	1

Проверка описанной процедуры сразу указывает на совпадение длин соответствующих строк в  $\pi$  и  $\pi'$  и на соответствие между числом вхождений  $i$  в  $\pi$  (соответственно в  $\pi'$ ) и суммой элементов  $i$ -го столбца (соответственно строки) матрицы  $A$ . Кроме того, можно видеть (например, посредством индукции по числу шагов в полной процедуре), что «сдвиги» могут распространяться только

на места, расположенные левее и ниже, а это обеспечивает строгое убывание по столбцам  $\pi$  на каждом шаге алгоритма. Поскольку заполнение  $\pi'$  производится из невозрастающей последовательности, видим, что эта невозрастаемость сохраняется по строкам и столбцам  $\pi'$ , однако по столбцам  $\pi'$  должно получаться строгое убывание, поскольку если  $i_1 i_2$  — два соседних члена нашей последовательности пар, то число «сдвижек», порожденных  $i_1$ , больше или равно числу «сдвижек», порожденных  $i_2$  (поэтому размещения  $i$  распространяются направо).

Основной вопрос, однако, таков: устанавливает ли описанная процедура взаимно однозначное соответствие между элементами множеств 2) и 3)? Покажем, что наша процедура однозначно обратима и тем самым устанавливает требуемое взаимно однозначное соответствие. Во-первых, воспользуемся замечанием в конце предыдущего абзаца, которое позволяет нам выбирать последнее размещение в  $\pi'$  однозначно (самый правый наименьший имеющийся элемент). Если это целое, скажем  $i$ , присутствует в первой строке  $\pi'$ , то соответствующий элемент в первой же строке  $\pi$  — это и есть результат последнего размещения в  $\pi$ . Если  $i$  присутствует в какой-нибудь другой строке, то соответствующий элемент той же строки в  $\pi$  — это конец цепочки «сдвижек» и мы, очевидно, всегда можем подняться к ее началу, т. е. определить последний элемент, размещенный в  $\pi$ . Таким образом, эта процедура влечет взаимную однозначность; тем самым теорема 11.4 доказана.

**Т е о р е м а 11.5.** Если матрица  $A$  из 1) в теореме 11.4 соответствует паре разбиений  $(\pi, \pi')$  из 3), то транспонированная матрица  $A^T$  соответствует паре разбиений  $(\pi', \pi)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Введем класс члена  $i_j$  в последовательности пар, соответствующей матрице  $A$ , как номер позиции элемента  $j$  в первой строке  $\pi$  при (однозначном) размещении этого  $j$  в эту первую строку в ходе описанного в теореме 11.4 алгоритма. Возвращаясь к нашему примеру (11.3.1), можем теперь сразу выписать классы каждой пары:

3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
3	2	2	2	1	1	3	2	1	3	3	2	2	1	1	1
1	2	3	4	5	6	2	5	7	3	4	6	7	8	9	10

Элементы первой строки разбиения  $\pi$  располагаются в порядке крайних элементов в каждом классе, именно, 3 3 3 3 2 2 2 1 1 1.

Важность принадлежности к классу состоит в возможности его определения *вне* зависимости от лексикографического упорядочения последовательности пар. Именно,  $i_j$  входит в класс  $t$  тогда и только тогда, когда  $t$  — наибольшее подмножество пар

$$\begin{array}{l}
 i_1 i_2 \dots i_{t-1} i \\
 j_1 j_2 \dots j_{t-1} j
 \end{array}
 \quad \text{таких, что} \quad
 \begin{array}{l}
 j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_{t-1} \geq j, \\
 i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_{t-1} \geq i.
 \end{array}$$

Таким образом, из этого последнего замечания видим, что класс члена  $i$  в нашей последовательности таков же, как и члена  $i$  в последовательности обратно упорядоченных пар, которая, очевидно, соответствует матрице  $A^T$ . Поэтому первая строка первого плоского разбиения, соответствующего  $A^T$ , есть первая строка  $\pi'$ , а первая строка второго плоского разбиения, соответствующего  $A^T$ , есть первая строка  $\pi$ .

Отбрасывая теперь от последовательности упорядоченных пар элементы, образующие первые строки плоских разбиений, можно совершенно аналогично продолжить этот процесс до установления взаимозамены вторых строк и так далее. Таким образом, видим, что  $(\pi', \pi)$  соответствует  $A^T$ .

**С л е д с т в и е 11.6.** *Соответствие из теоремы 11.4 обеспечивает взаимно однозначное соответствие между симметричными матрицами  $A$  из неотрицательных целых и плоскими разбиениями  $\pi$ , строго убывающими по столбцам. Кроме того, число вхождений  $i$  в  $\pi$  равно  $i$ -й строчной сумме в  $A$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Мы привлекаем теорему 11.5, отмечая, что  $A$  симметричная тогда и только тогда, когда  $A = A^T$ . Поэтому  $A \leftrightarrow (\pi, \pi)$ .

Это следствие имеет много интересных приложений; приведем здесь одно из наиболее полезных нам в дальнейшем.

**Т е о р е м а 11.7.** *Пусть  $S$  — некоторое множество положительных целых. Число плоских разбиений числа  $n$  со строго убывающими столбцами и слагаемыми из  $S$  равно коэффициенту при  $q^n$  в выражении*

$$\prod_{i \in S} (1 - q^i)^{-1} \prod_{\substack{i, j \in S \\ i < j}} (1 - q^{i+j})^{-1}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно следствию 11.6 производящая функция указанных разбиений имеет вид

$$\sum_A \prod_{i, j \geq 1} q^{ia_{ij}},$$

где суммирование проводится по всем симметричным матрицам  $A$  из неотрицательных целых, причем  $a_{ij} = 0$ , если  $i \notin S$  или  $j \notin S$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_A \prod_{i, j \geq 1} q^{ia_{ij}} &= \sum_A \left( \prod_{i=1}^{\infty} q^{ia_{ii}} \right) \left( \prod_{\substack{i, j \in S \\ i < j}} q^{ia_{ij} + ja_{ji}} \right) = \\ &= \left( \prod_{i \in S} \sum_{a_{ii}=0}^{\infty} q^{ia_{ii}} \right) \left( \prod_{\substack{i, j \in S \\ i < j}} \sum_{a_{ij}=0}^{\infty} q^{(i+j)a_{ij}} \right) = \\ &= \prod_{i \in S} (1 - q^i)^{-1} \prod_{\substack{i, j \in S \\ i < j}} (1 - q^{i+j})^{-1}. \end{aligned}$$

В разделе задач обсуждается тот факт, что ряд производящих функций от двух переменных весьма естественно связан с плоскими разбиениями через следствие 11.6. Так, коэффициент при  $a^m q^n$  в выражении

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - aq^n)^{-n}.$$

равен числу плоских разбиений  $n$ , для которых сумма диагональных частей равна  $m$ .

#### 11.4. Многомерные разбиения

Мак-Магон однажды предположил, что если  $M_k(n)$  — число  $k$ -мерных разбиений числа  $n$  (определение см. в § 11.1), то

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_k(n) q^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i)^{-\binom{k+i-2}{k-1}}. \quad (11.4.1)$$

Гипотеза, конечно, верна при  $k = 1$ ,  $k = 2$ . В конце концов, Мак-Магон стал сомневаться в общей ее правильности, однако окончательно опровергнуть ее удалось лишь в 60-х годах. Следующая теорема представляет простой (хотя и трудоемкий) вычислительный метод для опровержения гипотезы Мак-Магона; этот метод легко распространяется на любые задачи о  $k$ -мерных разбиениях малых чисел

**Т е о р е м а 11.8.** Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_k(n) q^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i)^{-\binom{k+i-2}{k-1}}. \quad (11.4.2)$$

Тогда

$$\mu_k(0) = M_k(0) = 1, \quad (11.4.3)$$

$$\mu_k(1) = M_k(1) = 1, \quad (11.4.4)$$

$$\mu_k(2) = M_k(2) = k + 1, \quad (11.4.5)$$

$$\mu_k(3) = M_k(3) = 1 + 2k + \binom{k}{2}, \quad (11.4.6)$$

$$\mu_k(4) = M_k(4) = 1 + 4k + 4 \binom{k}{2} + \binom{k}{3}, \quad (11.4.7)$$

$$\mu_k(5) = M_k(5) = 1 + 6k + 11 \binom{k}{2} + 7 \binom{k}{3} + \binom{k}{4}, \quad (11.4.8)$$

$$\begin{aligned} \mu_k(6) &= M_k(6) + \binom{k}{4} + \binom{k}{3} = \\ &= 1 + 10k + 27 \binom{k}{2} + 29 \binom{k}{3} + 12 \binom{k}{4} + \binom{k}{5}. \end{aligned} \quad (11.4.9)$$

Доказательство. Начнем с изучения  $\mu_k(n)$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \mu_k(n) q^n &= (1-q)^{-1} (1-q^2)^{-k} (1-q^3)^{-\binom{k+1}{2}} \times \\
 &\times (1-q^4)^{-\binom{k+2}{3}} (1-q^5)^{-\binom{k+3}{4}} (1-q^6)^{-\binom{k+4}{5}} \dots = \\
 &= (1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6+\dots) \times \\
 &\times \left(1+kq^2+\binom{k+1}{2}q^4+\binom{k+2}{3}q^6+\dots\right) \times \\
 &\times \left(1+\binom{k+1}{2}q^3+\frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\left(\binom{k+1}{2}+1\right)q^6+\dots\right) \times \\
 &\times \left(1+\binom{k+2}{3}q^4+\dots\right) \left(1+\binom{k+3}{4}q^5+\dots\right) \times \\
 &\times \left(1+\binom{k+4}{5}q^6+\dots\right) \dots = \\
 &= 1+q+(k+1)q^2+\left(1+2k+\binom{k}{2}\right)q^3+ \\
 &+ \left(1+4k+4\binom{k}{2}+\binom{k}{3}\right)q^4+ \\
 &+ \left(1+6k+11\binom{k}{2}+7\binom{k}{3}+\binom{k}{4}\right)q^5+ \\
 &+ \left(1+10k+27\binom{k}{2}+29\binom{k}{3}+12\binom{k}{4}+\binom{k}{5}\right)q^6+\dots
 \end{aligned} \tag{11.4.10}$$

Теперь можно определить  $\mu_k(n)$  для  $0 \leq n \leq 6$  приравниванием коэффициентов крайних членов равенства (11.4.10).

Для вычисления  $M_k(n)$  заметим, что каждое  $k$ -мерное разбиение может быть получено из обычного (одномерного) разбиения  $n$  подходящим распределением его в первом «квадранте»  $k$ -мерного пространства

Для вычисления  $M_k(2)$  заметим, что каждое  $k$ -мерное разбиение может быть рассмотрено как результат соответствующего распределения обычного (одномерного) распределения 2 по первому «квадранту»  $k$ -мерного пространства. Так, при вычислении  $M_k(2)$  видим, что обычное разбиение (2) может быть размещено в  $k$ -мерном пространстве единственным способом; с другой стороны, разбиение  $1+1$  можно поместить в первый «квадрант»  $k$  способами: одна единица ставится в начало координат, а другая — на любую из  $k$  координатных осей. Поэтому  $M_k(2) = 1+k$ . Остальные шесть значений  $M_k(n)$  вычисляются тем же способом. Поскольку значение  $M_k(6)$  играет решающую роль для следствия 11.9, оно вычисляется в табл. 11.1, которая не требует дополнительных поясне-

ний. Для подсчета всех  $k$ -мерных разбиений числа 6 нужно лишь просуммировать все числа в правом столбце таблицы:

$$M_k(6) = 1 + 10k + 27 \binom{k}{2} + 28 \binom{k}{3} + 11 \binom{k}{4} + \binom{k}{5},$$

что и дает (11.4.9).

**С л е д с т в и е 11.9.** *Равенство (11.4.1) выполняется при  $k = 1, 2$  и не выполняется ни при каких  $k > 2$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Случай  $k = 1$  есть частный случай теоремы 1.1. Случай  $k = 2$  — это равенство (11.2.15). Равенство (11.4.1) эквивалентно тому, что  $\mu_k(n) = M_k(n)$  при всех  $n$ , однако

$$\mu_k(6) - M_k(6) = \binom{k}{3} + \binom{k}{4} > 0, \quad k \geq 3.$$

Поэтому (11.4.1) не выполняется при  $k > 2$ .

Подмечая, что  $M_2(3) = 6 = 3 \cdot 2$ ,  $M_2(6) = 48 = 3 \cdot 16$ ,  $M_2(9) = 282 = 3 \cdot 94$ ,  $M_2(12) = 1479 = 3 \cdot 493$ ,  $M_2(15) = 6879 = 3 \cdot 2293$ , можно прельститься гипотезой:  $3 \mid M_2(3n)$  для всех  $n$ . Наши надежды, однако, разрушает следующая

**Т е о р е м а 11.10.** *Если  $k + 1$  — простое, то*

$$M_k((k+1)n) \equiv 0 \pmod{k+1}, \quad 1 \leq n < (k+1)^k, \quad (11.4.11)$$

$$M_k((k+1)^{k+1}) \equiv 1 \pmod{k+1}. \quad (11.4.12)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Можно изображать каждое  $k$ -мерное разбиение  $(k+1)$ -мерным графическим представлением или графом Феррера (просто выкладывая столбец из  $n_{i_1 i_2 \dots i_k}$  точек на прямой, параллельной оси  $x_{k+1}$ , проходящей через точку  $(j_1, j_2, \dots, j_k, 0)$ ). Группа  $G$  из  $k+1$  преобразований  $T^0, T^1, T^2, \dots, T^k$  вида

$$T: (x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \rightarrow (x_{k+1}, x_1, x_2, \dots, x_k)$$

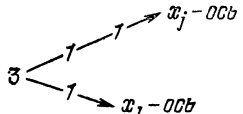
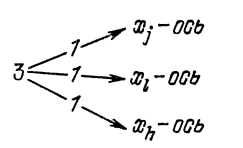
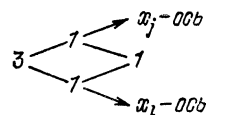
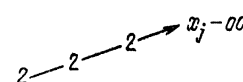
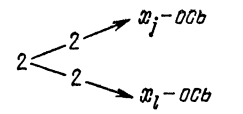
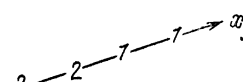
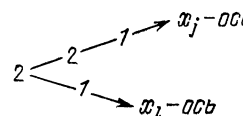
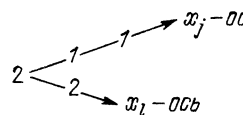
всегда либо из данного графа Феррера делает  $k+1$  различных графов Феррера, либо оставляет исходный граф Феррера неизменным (неподвижным). Это происходит потому, что  $G$  есть циклическая группа простого порядка и, значит, любой неединичный элемент в  $G$  порождает всю группу. Если граф Феррера остается неподвижным под действием группы  $G$ , то, поскольку лишь точки диагонали  $(x, x, \dots, x)$  остаются неподвижными под действием всякого  $T^i \in G$ , — этот исходный граф Феррера разбиения числа, кратного  $k+1$  и инвариантного относительно  $G$ , есть в точности  $(k+1)$ -мерный гиперкуб с  $k+1$  точками на каждом ребре. Стало быть,  $k$ -мерное разбиение числа  $(k+1)n$  можно разделить на непересекающиеся множества по  $k+1$  элементов в каждом (или просто на орбиты  $G$ ) всякий раз, как  $0 < n < (k+1)^k$ . Таким образом, (11.4.11) доказано.

Т а б л и ц а 11.1

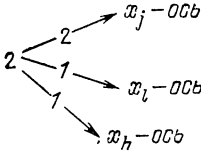
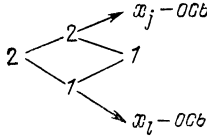
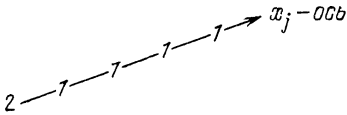
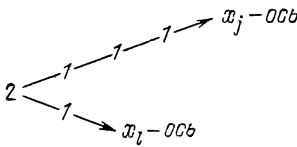
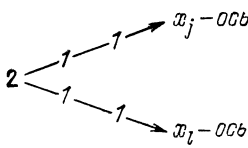
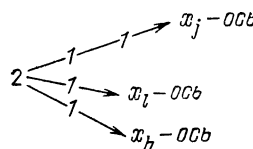
Обычное разбиение $\mathfrak{b}$	Расположение в многомерном пространстве	Полное число расположений
$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}$ в начале координат	1
$5+1$	$5 \xrightarrow{1} x_j - \text{ось}$	$k$
$4+2$	$4 \xrightarrow{2} x_j - \text{ось}$	$k$
$4+1+1$	$4 \xrightarrow{1} \xrightarrow{1} x_j - \text{ось}$	$k$
	$4 \begin{cases} \xrightarrow{1} x_j - \text{ось} \\ \xrightarrow{1} x_l - \text{ось} \end{cases}$	$\binom{k}{2}$
$3+3$	$3 \xrightarrow{3} x_j - \text{ось}$	$k$
$3+2+1$	$3 \xrightarrow{2} \xrightarrow{1} x_j - \text{ось}$	$k$
	$3 \begin{cases} \xrightarrow{2} x_j - \text{ось} \\ \xrightarrow{1} x_l - \text{ось} \end{cases}$	$2 \binom{k}{2}$
$3+1+1+1$	$3 \xrightarrow{1} \xrightarrow{1} \xrightarrow{1} x_j - \text{ось}$	$k$



Т а б л и ц а 11.1 (продолжение)

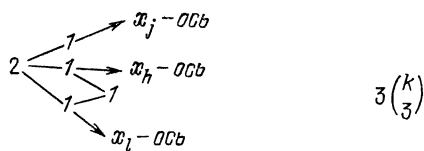
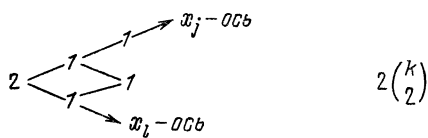
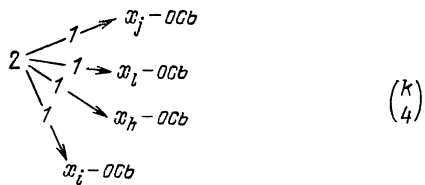
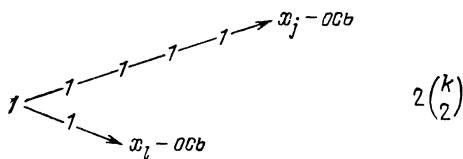
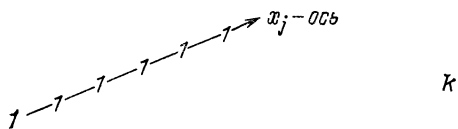
Обычное разбиение 6	Расположение в многомерном пространстве	Полное число расположений
		$2 \binom{k}{2}$
		$\binom{k}{3}$
		$\binom{k}{2}$
$2+2+2$		$k$
		$\binom{k}{2}$
$2+2+1+1$		$k$
		$2 \binom{k}{2}$
		$2 \binom{k}{2}$

Т а б л и ц а 11.1 (продолжение)

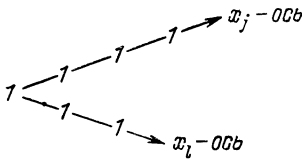
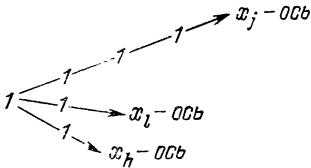
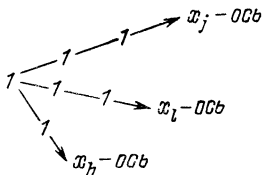
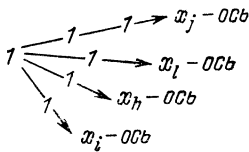
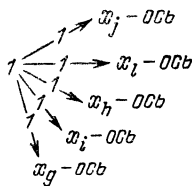
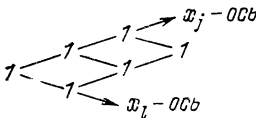
Обычное разбиение 6	Расположение в многомерном пространстве	Полное число расположений
		$3 \binom{k}{3}$
		$2 \binom{k}{2}$
$2+1+1+1+1$		$k$
		$2 \binom{k}{2}$
		$\binom{k}{2}$
		$3 \binom{k}{3}$

Т а б л и ц а 11.1 (продолжение)

Обычное разбиение 6	Расположение в многомерном пространстве	Полное число расположений
---------------------	---	---------------------------


 $1+1+1+1+1+1$ 


Т а б л и ц а 11.1 (продолжение)

Обычное разбиение 6	Расположение в многомерном пространстве	Полное число расположений
		$2 \binom{k}{2}$
		$3 \binom{k}{3}$
		$3 \binom{k}{3}$
		$4 \binom{k}{4}$
		$\binom{k}{5}$
		$2 \binom{k}{2}$

Т а б л и ц а 11.1 (продолжение)

Обычное разбиение $\delta$	Расположение в многомерном пространстве	Полное число расположений
		$\binom{k}{2}$
		$2 \binom{k}{2}$
		$3 \binom{k}{3}$
		$6 \binom{k}{4}$
		$3 \binom{k}{3}$
		$6 \binom{k}{3}$

С другой стороны, имеется единственный  $(k + 1)$ -мерный граф Феррера числа  $(k + 1)^{k+1}$ , имеющий  $k + 1$  точек на диагонали, именно, описанный выше гиперкуб. А поскольку все остальные  $k$ -мерные разбиения числа  $(k + 1)^{k+1}$  можно разделить на множества по  $k + 1$  элементов в каждом, то

$$M_k((k + 1)^{k+1}) \equiv 1 \pmod{k + 1}.$$

### Задачи

1. Рассмотрением структуры соответствующих рангов разбиения (см. § 9.3) показать, что имеется взаимно однозначное соответствие между каждым обычным разбиением  $\pi = (\lambda_1 \dots \lambda_k)$  числа  $n$  и упорядоченными парами разбиений  $(\pi_1, \pi_2)$ , где  $\pi_1 = (\lambda'_1 \lambda'_2 \dots \lambda'_r)$ ,  $\pi_2 = (\lambda''_1 \dots \lambda''_r)$ ,  $\lambda_1 = \lambda'_1$ ,  $k - 1 = \lambda''_1$ ,  $\sum (\lambda'_i + \lambda''_i) = n$ ,  $\lambda'_i - \lambda''_i = i$ -й соответствующий ранг разбиения  $\pi$ .

2. Соответствие из задачи 1 можно использовать для установления взаимно однозначного соответствия между плоскими разбиениями  $\pi$  числа  $n$  не более чем с  $r$  строками и частями, не превосходящими  $m$ , и упорядоченными парами  $(\pi', \pi'')$  плоских разбиений, строго убывающих по столбцам, таких, что каждая часть из  $\pi'$  не превосходит  $m$ , а каждая часть из  $\pi''$  не превосходит  $r$ .

3. Задачу 2 и теорему 11.4 можно применять для доказательства следствия 11.3, привлекая для этого технику теоремы 11.7.

4. Графы Феррера плоских разбиений (см. § 11.4) могут быть использованы для определения шести сопряжений плоских разбиений  $\pi$  (которые возникают из 3! возможных перестановок координатных осей трехмерного графа Феррера разбиения  $\pi$ ). Рассмотрим одно из таких сопряжений, скажем  $\tau$ , для которого  $\tau\pi$  — плоское разбиение, в котором каждая строка разбиения  $\tau\pi$  составляет сопряжение (уже в смысле обычных разбиений) соответствующей строки разбиения  $\pi$ . След плоского разбиения  $\pi$  — это сумма  $\sum n_{ii}$  всех диагональных элементов  $\pi$ ; сопряженный след разбиения  $\pi$  — это число элементов  $n_{ij}$  разбиения  $\pi$  таких, что  $n_{ij} \geq i$ . Доказать, что след  $\pi$  и сопряженный след  $\tau\pi$  идентичны.

5. Из задач 3 и 4 вывести, что коэффициент при  $z^m q^n$  в выражении

$$\prod_{n \geq 1} (1 - zq^n)^{-n}$$

равен числу плоских разбиений  $n$  со следом  $m$ .

6. Асимптотические результаты гл. 6 (именно, теорема 6.2) применимы ко многим из производящих функций плоских разбиений. В частности, число плоских разбиений  $n$ , т. е.  $p_{\infty, \infty}(n, \infty)$  удовлетворяет условию

$$p_{\infty, \infty}(n, \infty) \sim (\zeta(3) 2^{-11})^{1/36} n^{-25/36} \exp\{3 \cdot 2^{-2/3} \zeta(3)^{1/3} n^{2/3} + 2c\},$$

где

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}, \quad c = \int_0^{\infty} \frac{y \log y}{e^{2\pi y} - 1} dy.$$

Соответствующие функции для теоремы 6.2 имеют вид  $D(s) = \zeta(s - 1)$ ,  $g(\tau) = e^{-\tau}/(1 - e^{-\tau})^2$ .

Аналогичные результаты могут быть получены для ряда специальных случаев теоремы 11.7.

7. Рассмотрим  $r$ -мерные разбиения, у которых ненулевые элементы  $n_{i_1 i_2 \dots i_r}$  располагаются именно в тех точках  $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ , которые задают графическое

представление некоторого фиксированного  $(r-1)$ -мерного разбиения  $\pi$  числа  $N$ . Пусть  $a_m(s_1, \dots, s_v)$  обозначает число  $r$ -мерных разбиений  $m$  со строгим убыванием, выполняющимся в (11.1.1) всякий раз, как выполнено любое из неравенств  $i_{s_1} < j_{s_1}$ ,  $i_{s_2} < j_{s_2}$ , ...,  $i_{s_v} < j_{s_v}$ , где  $\{s_1, s_2, \dots, s_v\}$  — фиксированное подмножество множества  $\{1, 2, \dots, r\}$ . Пусть  $\{t_1, t_2, \dots, t_{r-v}\}$  — дополнение  $\{s_1, s_2, \dots, s_v\}$  в  $\{1, 2, \dots, r\}$ . Если

$$A(q) = \sum_{m \geq 0} a_m(s_1, s_2, \dots, s_r) q^m$$

и

$$B_0(q) = \sum_{m \geq 0} a_m(t_1, t_2, \dots, t_{r-v}) q^m,$$

то

$$B_0(q) = (-1)^p (\pi) q^p (\pi) A(1/q),$$

где  $p(\pi)$  — число  $(r-1)$ -мерных разбиений, графическое представление которого содержится внутри графического представления разбиения  $\pi$ .

### З а м е ч а н и я

Эта глава лишь весьма поверхностно характеризует имеющуюся область активных исследований многомерных разбиений. Возникновение многомерных разбиений как таковых связано с Мак-Магоном (1916). Однако таблицы Юнга (которые по существу эквивалентны плоским разбиениям, строго убывающим по столбцам) были еще раньше введены Юнгом в его работе по теории инвариантов. Таблицы Юнга играли важную роль в теории представлений симметрической группы (см. [18]); они также присутствуют в алгебраической геометрии (см. [13, 14]) и возникают во многих комбинаторных задачах (см. [11, 12]).

В [21] представлена библиография текущих работ. Материал § 11.2 взят из [3]; техника Карлитца распространена в [10] на некоторые другие задачи о плоских разбиениях. В [8] рассмотрен случай, в котором  $q=1$  для одной задачи алгебраической геометрии. Материал § 11.3 первоначально рассматривался в [17, 19] (см. также [20]); мы изложили расширение (см. [9]) конструкции из [19]. Приложение плоских разбиений представлено в [10]. Последние исследования по плоским разбиениям были, несомненно, вдохновлены качественно новыми подходами, изложенными в работах [7, 6].

Теорему 11.8 и ее следствие см. в [2]. В [24, 25] представлены все формулы для  $M_k(j)$ ,  $1 \leq j \leq 5$ , однако Тейц, по-видимому, не подозревал о существовании гипотезы Мак-Магона. В [27] разработана иная техника для опровержения многих случаев гипотезы Мак-Магона. Теорему 11.10 см. в [1]; техника ее доказательства восходит к [27]. Возможность перенесения тождеств типа Роджерса—Рамануджана на плоские разбиения была кратко рассмотрена в [4], однако в [5] указано на наличие ошибки в [4].

Литературу по материалу этой главы см. в [15, раздел P64].

Задачи 1—3 — [10]; задачи 4—5 — [23]; задача 6 — [26]; задача 7 — [22]; разработка  $(P, \omega)$ -разбиений позволила Стенли легко вывести этот результат из общей взаимной теоремы. Мы вводим  $(P, \omega)$ -разбиения в § 14.4.

### ЛИТЕРАТУРА

1. A n d r e w s G. E. (1971). On a conjecture of Guinand for the plane partition function. — Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 17, p. 275—276.
2. A t k i n A. O. L., B r a t l e y P., M a c D o n a l d I. G., M c K a y J. K. S. (1967). Some computations for  $m$ -dimensional partitions. — Proc. Cambridge Phil. Soc. 63, p. 1097—1100.

3. Carlitz L. (1967). Rectangular arrays and plane partitions. — *Acta Arith.* **13**, p. 22—47.
4. Chaundy T. W. (1931). Partition-generating functions. — *Quart. J. Math. Oxford Ser. 2*, p. 234—240.
5. Gordon B. (1962). Two new representations of the partition function. — *Proc. Amer. Math. Soc.* **13**, p. 869—873.
6. Gordon B. (1971). Notes on plane partitions. V. — *J. Combinatorial Theory* **B11**, p. 157—168.
7. Gordon B., Houten L. (1968). Notes on plane partitions. I, II. — *J. Combinatorial Theory* **4**, p. 72—80, 81—99.
8. Hodge W. V. D., Pedoe D. (1952). *Methods of Algebraic Geometry*, Vol. 2. — Cambridge Univ. Press, London and New York.
9. Knuth D. E. (1970). Permutations matrices and generalized Young tableaux. — *Pacific J. Math.* **34**, p. 709—727.
10. Knuth D. E., Bender E. A. (1972). Enumeration of plane partitions. — *J. Combinatorial Theory* **13**, p. 40—54.
11. Kreweras G. (1965). Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers. — *Cahiers du B. U. R. O.* № 6, Paris.
12. Kreweras G. (1967). Traitement simultané du Problème de Young et Problème Simon Newcomb. — *Cahiers du B. U. R. O.* № 10, Paris.
13. Lascoux A. (1974a). Polynômes symétriques et coefficients d'intersection de cycles de Schubert. — *C. R. Acad. Sci. Paris* **279**, p. 201—204.
14. Lascoux A. (1974b). Tableaux de Young et fonctions de Schur Littlewood. — *Séminaire Delange—Pisot—Poitou*, № 4, p. 1—7.
15. LeVeque W. J. (1974). *Reviews in Number Theory*, Vol. 4. — Amer. Math. Soc., Providence, R. I.
16. MacMahon P. A. (1916). *Combinatory Analysis*; Vol. 2. — Cambridge Univ. Press, London and New York (reprinted by Chelsea, New York, 1960).
17. Robinson G. deB. (1938). On the representations of the symmetric group. — *Amer. J. Math.* **60**, p. 745—760.
18. Rutherford D. E. (1948). *Substitutional Analysis*. — Edinburgh Univ. Press, Edinburgh (reprinted by Hafner, New York, 1968).
19. Schensted C. (1961). Longest increasing and decreasing subsequences. — *Canadian J. Math.* **13**, p. 179—191.
20. Schutzenberger M.-P. (1963). Quelques remarques sur une construction de Schensted. — *Math. Scand.* **12**, p. 117—128.
21. Stanley R. P. (1971). Theory and application of plane partitions, I, II. — *Studies in Appl. Math.* **50**, p. 167—188, 259—279.
22. Stanley R. P. (1972). Ordered structures and partitions. — *Mem. Amer. Math. Soc.* **119**.
23. Stanley R. P. (1973). The conjugate trace and trace of a plane partition. — *J. Combinatorial Theory* **A14**, p. 53—65.
24. Tietze H. (1940—1941). Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren, I—IX. — *S.-B. Math.—Natur. Abt. Bayer. Akad. Wiss.*, p. 23—54, 69—131, 133—145, 147—166; (1940), p. 1—37, 39—55, 165—170, 171—186, 187—191 (1941).
25. Tietze H. (1941). Über die Anzahl komprimierter Gitterpunkt mengen von gegebener Punktezahl. — *Math. Z.* **47**, p. 352—356.
26. Wright E. M. (1931). Asymptotic partition formulae, I: Plane partitions. — *Quart. J. Math. Oxford Ser. 2*, p. 177—189.
27. Wright E. M. (1968). Rotatable partions. — *J. London Math. Soc.* **43**, p. 501—505.



## ВЕКТОРНЫЕ ИЛИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ РАЗБИЕНИЯ

### 12.1. Введение

Как мы видели в гл. 4, довольно часто возникают задачи аддитивного представления ненулевых векторов с неотрицательными целыми координатами (так называемые многокомпонентные числа). В гл. 4 мы имели дело с приложениями «композиций» многокомпонентных чисел. Теперь будем рассматривать разбиения многокомпонентных чисел. Как обычно, в композициях порядок слагаемых учитывается, а в разбиениях — нет. Элементарная теория многокомпонентных разбиений подобна элементарной теории обычных разбиений (см. гл. 1) своей связью с бесконечными произведениями. К сожалению, неизвестен ни один действительно простой тип бесконечных рядов, который мог бы служить полезным инструментом при изучении многокомпонентных разбиений, таких, например, какими являются базисные гипергеометрические ряды (введенные в гл. 2), применяющиеся для изучения обычных разбиений. Таким образом, мы знаем лишь некоторые сравнительно простые тождества с функциями многокомпонентных разбиений и не имеем никакого аналога эйлеровой пентагональной теоремы (следствие 1.7), который обеспечивал бы быстрое вычисление функций многокомпонентных разбиений. Наиболее полезные способы вычисления функций многокомпонентных разбиений представлены теоремой 12.3.

Л. Карлитцем и другими рассматривались задачи об ограниченных многокомпонентных разбиениях. В частности, они рассматривали  $k$ -компонентные разбиения

$$(n_1, \dots, n_k) = \sum_{j=1}^r (m_{1j}, m_{2j}, \dots, m_{kj}),$$

удовлетворяющие «невозрастающему» условию

$$\min(m_{1j}, \dots, m_{kj}) \geq \max(m_{1, j+1}, \dots, m_{k, j+1}).$$

Такие вопросы изучаются в § 12.4.

## 12.2. Многокомпонентные производящие функции

Напомним (см. § 4.3), что под  $P(n) = P(n_1, n_2, \dots, n_r)$  мы понимаем число разбиений  $r$ -компонентного (многокомпонентного) числа  $(n_1, n_2, \dots, n_r)$  (т. е.  $r$ -вектора из неотрицательных целых, из которых не все равны нулю). Таким образом,  $P(n)$  есть число различных представлений  $n$  в виде суммы многокомпонентных чисел:

$$n = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \dots + \xi^{(s)} \quad (12.2.1)$$

с лексикографическим упорядочением  $\xi^{(i)} \geq \xi^{(i+1)}$  частей:

$$\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_r^{(i)}) > (\xi_1^{(i+1)}, \dots, \xi_r^{(i+1)}) = \xi^{(i+1)}$$

при  $\xi_j^{(i)} > \xi_j^{(i+1)}$ , где  $j$  — наименьшее целое, такое, что  $\xi_j^{(i)} \neq \xi_j^{(i+1)}$ . Если число частей в этом разбиении ограничено числом  $j$ , будем писать  $P_{\leq}(n; j)$ .

Для упрощения исследований соответствующих производящих функций определим  $Q(n)$  как число разбиений  $n$  с различными частями, допускающими часть  $(0, 0, \dots, 0)$ , и  $Q(n; j)$  — число таких разбиений с  $j$  частями. Если  $(0)$  исключается как часть, то соответственно пишем  $Q_+(n)$  или  $Q_+(n; j)$ . Многие результаты гл. 1 непосредственно расширяются на  $P(n)$  и  $Q(n)$ . Действительно, простая переделка доказательства теоремы 1.1 приводит нас к тому, что

$$\begin{aligned} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_r \geq 0} P(n) x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r} &= \\ &= \prod_{\substack{n_1 \geq 0, \dots, n_r \geq 0 \\ \text{не все нули}}} (1 - x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r})^{-1}, \end{aligned} \quad (12.2.2)$$

$$\sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_r \geq 0} Q(n) x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r} = \prod_{n_1 \geq 0, \dots, n_r \geq 0} (1 + x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}), \quad (12.2.3)$$

где для абсолютной сходимости нужно лишь предполагать, что  $|x_i| < 1$  для  $1 \leq i \leq r$ .

Теперь уже вполне ясно, что свойства обычных (или однокомпонентных) разбиений, выражающиеся в терминах бесконечных произведений, можно без особых трудностей расширять и на многокомпонентные разбиения. Так, имеется следующее расширение теоремы Эйлера.

**Теорема 12.1.** Для каждого  $n$   $Q_+(n)$  равно  $\mathcal{O}(n)$  — числу разбиений  $n$  (см. (12.2.1)), в которых каждая часть  $(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_r^{(i)})$  имеет по крайней мере одну нечетную компоненту.

**Доказательство.** Как и в доказательстве следствия 1.2, имеем

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{(n) > (0)} Q_+(n) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r} &= \prod_{(n) > (0)} (1 + x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}) = \\ &= \prod_{(n) > (0)} \frac{1 - x_1^{2n_1} x_2^{2n_2} \dots x_r^{2n_r}}{1 - x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}} = \prod_{\substack{(n) > (0) \\ \text{не все } n_i \text{ четны}}} (1 - x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r})^{-1} = \\ &= \sum_{(n) > (0)} \mathcal{O}(x) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}; \end{aligned}$$

поэтому  $Q_+(n) = \mathcal{O}(n)$  для каждого  $n$ .

Анализируя наши разработки по обычным разбиениям, замечаем, что свойства идеалов разбиения порядка 1 (см. § 8.3) почти целиком связаны с тем фактом, что соответствующие производящие функции оказываются бесконечными произведениями. Стало быть, можно развивать соответствующую теорию и для многокомпонентных разбиений. Например, можно получить обобщение эйлеровых пар для многокомпонентных разбиений.

**Теорема 12.2.** Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — два множества положительных чисел. Число разбиений  $n$  на части  $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_r^{(i)})$ , в которых  $\xi_j^{(i)} \in S_1$  для всех  $i$  и  $1 \leq j \leq r$  и в которых нет части, повторяющейся более чем  $t - 1$  раз, всегда равно числу разбиений  $n$  на части  $\xi^{(i)}$  с  $\xi_j^{(i)} \in S_1$ ,  $1 \leq j \leq r$ , и некоторым  $\xi_{j_0}^{(i)} \in S_2$  для всех  $i$  тогда и только тогда, когда  $tS_1 \subseteq S_1$  и  $S_2 = S_1 - tS_1$ .

### 12.3. Многочлены Белла и формулы для функций многокомпонентных разбиений

С целью получения полезных формул для вычисления функций многокомпонентных разбиений мы привлекаем хорошо известные многочлены Белла. Хотя эта методика не приведет к результату, даже близкому по своей природе к следствию 1.7, она, однако, приведет к эффективным вычислительным формулам, особенно полезным в свете существования обширных таблиц многочленов Белла.

**Многочлены Белла** (впервые широко изучавшиеся Беллом) возникают как вспомогательное средство при взятии  $n$ -й производной от сложной функции. Именно, рассчитывая найти формулу для  $n$ -й производной функции  $h(t) = f(g(t))$  и вводя обозначения  $\frac{d^n h}{dt^n} = h_n$ ,  $\frac{d^n f}{dg^n} = f_n$ ,  $\frac{d^n g}{dt^n} = g_n$ , видим, что

$$\begin{aligned} h_1 &= f_1, \\ h_2 &= f_1 g_2 + f_2 g_1^2, \\ h_3 &= f_1 g_3 + 3f_2 g_2 g_1 + f_3 g_1^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Довольно просто индукцией устанавливается, что

$$h_n = f_1 \alpha_{n1}(g_1, \dots, g_n) + f_2 \alpha_{n2}(g_1, \dots, g_n) + \dots + f_n \alpha_{nn}(g_1, \dots, g_n), \quad (12.3.1)$$

где  $\alpha_{ni}(g_1, \dots, g_n)$  — однородный многочлен степени  $i$  от переменных  $g_1, \dots, g_n$ .

В свете этого последнего замечания видим, что изучение  $h_n$  может быть сведено к изучению *многочленов Белла*

$$\begin{aligned} Y_n(g_1, g_2, \dots, g_n) &= \\ &= \alpha_{n1}(g_1, \dots, g_n) + \alpha_{n2}(g_1, \dots, g_n) + \dots + \alpha_{nn}(g_1, \dots, g_n). \end{aligned} \quad (12.3.2)$$

Заметим, что  $Y_n$  является многочленом от  $n$  переменных, а тот факт, что в исходной ситуации  $g_i$  было  $i$ -й производной, несуществен при рассмотрении (12.3.2). Полагая  $f(t) = e^t$  в (12.3.1), получаем простую формулу

$$Y_n(y_1, y_2, \dots, y_n) = e^{-y} \frac{d^n e^y}{dt^n}. \quad (12.3.3)$$

Формула эта важна по двум причинам. Во-первых, она дает рекуррентное соотношение для многочленов Белла (здесь мы пишем  $D$  вместо  $d/dt$ ):

$$\begin{aligned} Y_{n+1}(g_1, g_2, \dots, g_{k+1}) &= e^{-g} D^n (De^g) = e^{-g} D^n (g_1 e^g) = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{-g} D^{n-k} e^g) D^k g_1 = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} Y_{n-k}(g_1, g_2, \dots, g_{n-k}) g_{k+1}. \end{aligned} \quad (12.3.4)$$

Во-вторых, из (12.3.4) получаем компактное выражение для производящей функции многочленов Белла:

$$\mathcal{B}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n u^n}{n!}. \quad (12.3.5)$$

Требуемое выражение имеет вид

$$\log \mathcal{B}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n g_n}{n!}. \quad (12.3.6)$$

Для доказательства (12.3.6) надо лишь продифференцировать его по  $u$ ; приравнивание коэффициентов при  $u^n$  в получившемся равенстве приводит к тождеству, эквивалентному (12.3.4).

Если проэкспонировать (12.3.6) и раскрыть бесконечное произведение показательных функций в правой части полученного

равенства, получим следующую точную формулу для многочленов Белла:

$$Y_n(g_1, \dots, g_n) = \sum_{(k) \vdash n} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{g_2}{2!}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n}. \quad (12.3.7)$$

Многочлены Белла используются во многих проблемах комбинаторики; мы ограничим наше рассмотрение их приложением к задачам о многокомпонентных разбиениях.

Пусть

$$\mathcal{P}_j(x_1, \dots, x_r) = \mathcal{P}_j = 1 + \sum_{(n) \geq 0} P_{\leq}(n; j) x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r}, \quad (12.3.8)$$

$$\mathcal{Q}_j(x_1, \dots, x_r) = \mathcal{Q}_j = 1 + \sum_{(n) \geq 0} Q(n; j) x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r}, \quad (12.3.9)$$

$$F(u) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{P}_j u^j, \quad (12.3.10)$$

$$G(u) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{Q}_j u^j. \quad (12.3.11)$$

**Т е о р е м а 12.3.**

$$\mathcal{P}_j = \frac{Y_j(0! \beta_r(1), 1! \beta_r(2), 2! \beta_r(3), \dots, (j-1)! \beta_r(j))}{j!}, \quad (12.3.12)$$

$$(-1)^j \mathcal{Q}_j = \frac{Y_j(-0! \beta_r(1), -1! \beta_r(2), -2! \beta_r(3), \dots, -(j-1)! \beta_r(j))}{j!}, \quad (12.3.13)$$

$$\text{где } \beta_i(m) = \prod_{i=1}^j (1 - x_i^m)^{-1}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассуждения, устанавливающие (12.2.2) и (12.2.3), применимы и для доказательства того, что

$$F(u) = \prod_{n \geq 0} (1 - u x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r})^{-1}, \quad (12.3.14)$$

$$G(u) = \prod_{n \geq 0} (1 + u x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}). \quad (12.3.15)$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} \log F(u) &= - \sum_{n \geq 0} \log (1 - u x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{u^m x_1^{n_1 m} x_2^{n_2 m} \dots x_r^{n_r m}}{m} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u^m}{m} (1 - x_1^m)^{-1} (1 - x_2^m)^{-1} \dots (1 - x_r^m)^{-1} = \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u^m}{m!} (m-1)! \beta_r(m). \quad (12.3.16)
\end{aligned}$$

Равенство (12.3.14) следует из того факта, что (12.3.16) есть специальный случай (12.3.6), который эквивалентен (12.3.5). Далее,

$$\log G(-u) = -\log F(u) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u^m}{m!} (m-1)! \beta_r(m), \quad (12.3.17)$$

что и влечет (12.3.13).

Для иллюстрации полезности теоремы 12.3 вычислим  $\mathcal{P}_2$ : согласно (12.3.12) имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_2 &= \frac{1}{2} Y_2(\beta_r(1), \beta_r(2)) = \frac{1}{2} (\beta_r(2) + \beta_r(1)^2) = \\
&= \frac{1}{2} \left[ \prod_{i=1}^r (1 - x_i^2)^{-1} + \prod_{i=1}^r (1 - x_i^2) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \frac{1 + \prod_{i=1}^r (1 + x_i)}{\prod_{i=1}^r (1 - x_i)^2} = \frac{1}{2} \frac{\prod_{i=1}^r (1 - x_i) + \prod_{i=1}^r (1 + x_i)}{\prod_{i=1}^r (1 - x_i)(1 - x_i^2)}. \quad (12.3.18)
\end{aligned}$$

Отсюда можно довольно просто выводить выражения в виде рядов.

## 12.4. Ограниченные двухкомпонентные разбиения

Мы заканчиваем эту главу рассмотрением некоторых ограниченных разбиений двухкомпонентных чисел, для которых подходы § 11.2 оказываются неожиданно эффективными.

Будем рассматривать  $\pi(n, m)$  — число разбиений  $(n, m)$  на «стабильно невозрастающие» части, т. е. разбиения вида

$$(n, m) = (n_1, m_1) + (n_2, m_2) + \dots + (n_r, m_r), \quad (12.4.1)$$

где  $\min(n_i, m_i) \geq \max(n_{i+1}, m_{i+1})$ ,  $1 \leq i < r$ . Основной результат (принадлежащий Карлиццу) — это следствие 12.5, которое есть тождество, отличное от простых расширений идеалов разбиений порядка 1, рассмотренных в § 12.2.

**Т е о р е м а 12.4.** Для  $|x| < 1$ ,  $|y| < 1$  выполняется равенство

$$\begin{aligned}
&\sum_{n, m \geq 0} \pi(n, m) x^n y^m = \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n y^{n-1})^{-1} (1 - x^{n-1} y^n)^{-1} (1 - x^{2n} y^{2n})^{-1}. \quad (12.4.2)
\end{aligned}$$

**Доказательство.** Пусть  $\pi(a, b | n, m)$  обозначает число разбиений  $(n, m)$  типа (12.4.1), удовлетворяющих дополнительному ограничению  $\min(a, b) \geq \max(n_1, m_1)$ , и пусть

$$\xi_{ab} = \sum_{r, s \geq 0} \pi(a, b | r, s) x^r y^s.$$

Тогда ясно, что

$$\xi_{nm} = \sum_{r, s=0}^{\min(n, m)} x^r y^s \xi_{rs}; \quad (12.4.3)$$

здесь мы просто классифицировали каждое разбиение с наибольшей частью  $\max(r, s) \leq \min(n, m)$ .

Поэтому, если

$$F_1(u) = \sum_{r=0}^{\infty} u^r \xi_{rr},$$

то согласно (12.4.3) (заметим, что  $\xi_{nm} = \xi_{mn}$ , если  $m \geq n$ ;  $\xi_{nm} = \xi_{mm}$ , если  $n \geq m$ ) имеем

$$\begin{aligned} F_1(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n \sum_{r, s=0}^n x^r y^s \xi_{rs} = \sum_{r, s=0}^{\infty} x^r y^s \xi_{rs} \sum_{n=\max(r, s)}^{\infty} u^n = \\ &= \sum_{r \geq s} x^r y^s \xi_{ss} \sum_{n=r}^{\infty} u^n + \sum_{r \leq s} x^r y^s \xi_{rr} \sum_{n=s}^{\infty} u^n - \sum_{r=0}^{\infty} x^r y^r \xi_{rr} \sum_{n=r}^{\infty} u^n = \\ &= (1-u)^{-1} \left\{ \sum_{r \geq s} (xu)^r y^s \xi_{ss} + \sum_{r \leq s} x^r (yu)^s \xi_{rr} - \sum_{r=0}^{\infty} (xyu)^r \xi_{rr} \right\} = \\ &= (1-u)^{-1} \left\{ (1-xu)^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} (xyu)^s \xi_{ss} + \right. \\ &\quad \left. + (1-yu)^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} (xyu)^r \xi_{rr} - \sum_{r=0}^{\infty} (xyu)^r \xi_{rr} \right\} = \\ &= \frac{1 - xyu^2}{(1-u)(1-xu)(1-yu)} F_1(xyu). \end{aligned} \quad (12.4.4)$$

Повторение (12.4.4) сразу влечет, что

$$F_1(u) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - x^{2n+1} y^{2n+1} u^2}{(1 - x^n y^n u)(1 - x^{n+1} y^{n+1} u)(1 - x^n y^{n+1} u)}. \quad (12.4.5)$$

Наконец (по лемме Абеля), получаем требуемое:

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} \pi(n, m) x^n y^m = \lim_{r \rightarrow \infty} \xi_{rr} = \lim_{u \rightarrow 1^-} (1-u) F_1(u) =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - x^{2n-1} y^{2n-1}}{(1 - x^n y^n) (1 - x^{n-1} y^n) (1 - x^n y^{n-1})} = \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - x^{2n} y^{2n}) (1 - x^{n-1} y^n) (1 - x^n y^{n-1})}.
\end{aligned}$$

Поскольку бесконечное произведение в (12.4.2) является производящей функцией для  $\pi_1(n, m)$  — числа двухкомпонентных разбиений  $(n, m)$ , в которых все части имеют форму либо  $(2a, 2a)$ , либо  $(a-1, a)$ , либо  $(a, a-1)$ , то сразу получаем следующий результат.

**С л е д с т в и е 12.5.** Для всех  $n, m$

$$\pi(n, m) = \pi_1(n, m).$$

### Задачи

1. Формулу Кэли (см. задачу 2 гл. 5)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^i)} = \\
&= \sum \frac{1}{1^{p_1} 2^{p_2} 3^{p_3} \dots i^{p_i} p_1! p_2! \dots p_i! (1-q)^{p_1} (1-q^2)^{p_2} \dots (1-q^i)^{p_i}},
\end{aligned}$$

в которой суммирование проводится по всем разбиениям  $(1^{p_1} 2^{p_2} 3^{p_3} \dots)$  числа  $i$ , есть немедленное следствие теоремы 12.3.

2. Сумматорный максимум системы чисел  $n_1, \dots, n_r$  (обозначаемый через  $\text{smax}(n_1, \dots, n_r)$ ) определяется как  $\text{smax}(n_1, \dots, n_r) = n_1 + n_2 + \dots + n_r - (r-1) \min(n_1, \dots, n_r)$ . Тождество  $\text{smax}(n_1, \dots, n_r) = \max(n_1, \dots, n_r)$  в общем случае справедливо лишь, если  $r = 1$  или 2.

3. Обобщить доказательство теоремы 12.4 для доказательства того, что число разбиений многокомпонентного числа  $(n_1, \dots, n_r)$ , в которых максимальная координата каждой части по крайней мере столь же велика, как и сумматорный максимум следующей части, равно числу разбиений многокомпонентного числа  $(n_1, \dots, n_r)$ , в которых каждая часть имеет одну из  $2r-1$  форм:

$$\begin{aligned}
&(a+1, a, \dots, a), (a, a+1, a, \dots, a), \dots, (a, \dots, a, a+1), (ar+2, \dots, ar+2), \\
&(ar+3, \dots, ar+3), \dots, (ar+r, \dots, ar+r) \quad (a \geq 0).
\end{aligned}$$

Доказательство основывается на том замечании, что

$$\frac{1}{1-xu} + \frac{1}{1-yu} - 1 = \frac{1-xyu^2}{(1-xu)(1-yu)};$$

это есть специальный случай равенства

$$\begin{aligned}
&-\prod_{i=1}^r \left( \frac{1}{1-x_i u} - 1 \right) + \frac{1}{(1-ux_1) \dots (1-ux_r)} = \\
&= \frac{1 - x_1 x_2 \dots x_r u^r}{(1-ux_1)(1-ux_2) \dots (1-ux_r)}.
\end{aligned}$$



4. Из (12.3.18) легко следует, что число всех разбиений многокомпонентного числа  $(n_1, \dots, n_r)$  не более чем на две части равно  $\left[ \frac{1}{2} (n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_r + 1) + \frac{1}{2} \right]$ . Такие формулы для  $P(n; j)$  непосредственно выводятся из теоремы 12.3.

5. Применяя (12.3.6) к задаче 5 гл. 11, показать, что производящая функция для плоских разбиений со следом  $n$  имеет вид

$$\frac{1}{n!} Y_n \left( \frac{0! q}{(1-q)^2}, \frac{1! q^2}{(1-q^2)^2}, \frac{2! q^3}{(1-q^3)^2}, \dots, \frac{(n-1)! q^n}{(1-q^n)^2} \right).$$

6. Из задачи 5 видим, что производящая функция для плоских разбиений со следом 2 имеет вид

$$\frac{q^2(1+q^2)}{(1-q)^2(1-q^2)^2}.$$

7. Число разбиений многокомпонентного числа  $(n_1, \dots, n_r)$  совпадает с числом факторизаций числа  $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$ , где  $p_i$  — простые. Так, имеются четыре факторизации числа  $12 : 12, 6 \cdot 2, 4 \cdot 3, 3 \cdot 2 \cdot 2$  и четыре разбиения двухкомпонентного числа  $(2, 1) : (2, 1), (1, 1) + (1, 0), (2, 0) + (0, 1), (1, 0) + (1, 0) + (0, 1)$ .

8\*. Нетрудно показать, что

$$\left\{ \prod_{i=1}^r (1 - x_i)(1 - x_i^2) \dots (1 - x_i^{n_i}) \right\} \mathcal{P}_n(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

есть многочлен от  $x_1, \dots, x_r$ ; это следует из теоремы 12.3. Несколько более неожиданно теорема Гордона о том, что коэффициенты этого многочлена неотрицательны.

### З а м е ч а н и я

Мак-Магон (1915—1916, 1917) был первым, кто детально исследовал многокомпонентные разбиения. Обширный обзор последних работ дан в [7]. Теорему 12.1 см. в [6], а теорему 12.2 — в [20]. Многочлены Белла (интенсивно изучавшиеся Беллом (1934)) детально изучались в [14, 8]; равенство (12.3.7) известно как формула Фаа ди Бруно. Файн имеет несколько очень интересных результатов, связанных с суммами, подобными (12.3.7). Теорему 12.3 см. в [13], она также была передоказана в [21]; теорему 12.4 см. в [3, 4]; см. также [5, 16, 17, 1].

Литературу по материалу этой главы см. в разделе Р64 в [11].

Задача 1, — [12]; задачи 2, 3 — [1]; задача 8 — [10].

В связи с задачей 8 мы должны отметить работу Соломона (1977). Он интерпретирует (12.3.10) и (12.3.11) как ряды Пуанкаре некоторого градуированного векторного пространства, связанного с симметрической группой  $S_n$  на  $n$  буквах, и он сумел показать, что многочлен из задачи 8 также является некоторым рядом Пуанкаре. Такое интерпретирование этих многочленов сразу влечет теорему Гордона. Ряд других интересных связей между многокомпонентными разбиениями и теорией групп представлен в работе Соломона.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Andrews G. E. (1976). An extension of Carlitz's bipartition identity.
2. Bell E. T. (1934). Exponential polynomials. — Ann. of Math. **35**, p. 258—277.

3. Carlitz L. (1963a). Some generating functions. — *Duke Math. J.* 30, p. 191—201.
4. Carlitz L. (1963b). A problem in partitions. — *Duke Math. J.* 30, p. 203—213.
5. Carlitz L., Roselle D. P. (1966). Restricted bipartite partitions. — *Pacific J. Math.* 19, p. 221—228.
6. Cheema M. S. (1964). Vector partitions and combinatorial identities. — *Math. Comp.* 18, p. 414—420.
7. Cheema M. S., Motzkin T. S. (1971). Multipartitions and multipermutations. — *Proc. Symp. Pure Math.* 19, p. 39—70.
8. Comtet L. (1974). *Advanced Combinatorics*. — D. Reidel, Dordrecht.
9. Fine N. J. (1959). Sums over partitions. — *Rep. Inst. Theory of Numbers (Boulder)* p. 86—94.
10. Gordon B. (1963). Two theorems on multipartite partitions. — *J. London Math. Soc.* 38, p. 459—464.
11. LeVeque W. J. (1974). *Reviews in Number Theory*, Vol. 4. — Amer. Math. Soc., Providence, R. I.
12. MacMahon P. A. (1915—1916). *Combinatory Analysis*, Vols 1, 2. — Cambridge Univ. Press, London and New York (reprinted by Chelsea, New York, 1960).
13. MacMahon P. A. (1917). *Memoir on the theory of partitions of numbers*. VII. — *Philos. Trans. Roy. Soc. London* A217, p. 81—113.
14. Riordan J. (1958). *An Introduction to Combinatorial Analysis*. — Wiley, New York.
15. Robertson M. M. (1962). Partitions of large multipartities. — *Amer. J. Math.* 84, p. 16—34.
16. Roselle D. P. (1966a). Generalized Eulerian functions and a problem in partitions. — *Duke Math. J.* 33, p. 293—304.
17. Roselle D. P. (1966b). Restricted  $k$ -partite partitions. — *Math. Nachr.* 32, 139—148.
18. Roselle D. P. (1974). Coefficients associated with the expansion of certain products. — *Proc. Amer. Math. Soc.* 45, p. 144—150.
19. Solomon L. (1977). Partition identities related by symmetric polynomials in several sets of variables.
20. Subbarao M. V. (1971). Partition theorems for Euler pairs. — *Proc. Amer. Math. Soc.* 28, p. 330—336.
21. Wright E. M. (1956). Partitions of multipartite numbers. — *Proc. Amer. Math. Soc.* 7, p. 880—890.

## РАЗБИЕНИЯ В КОМБИНАТОРИКЕ

### 13.1. Введение

Материал этой главы мог бы составить содержание отдельной книги. Оправданием столь сокращенному изложению служит тот факт, что наша основная цель состояла в исследовании «разбиений», прежде всего, как «разбиений чисел». Не удивительно, что разбиения чисел тесно связаны с общими проблемами разбиений в комбинаторике. По этой причине рассмотрим некоторые направления, в которых разбиения играют важную роль: конечные векторные пространства, разбиения множеств и симметрические функции. Первое из направлений интенсивно разрабатывалось в последние годы; мы изложим здесь простой, но фундаментальный результат Кнута, связующий разбиения с комбинаторикой как конечных векторных пространств, так и конечных множеств. Разбиения множеств четко связал с симметрическими функциями Дубиле, работа которого излагается в § 13.3 и 13.4.

### 13.2. Разбиения и конечные векторные пространства

Напомним (см. гл. 3, теорема 3.1), что многочлен Гаусса

$$\begin{bmatrix} N+M \\ M \end{bmatrix} = \frac{(q)_{N+M}}{(q)_N (q)_M}$$

является производящей функцией для  $p(N, M, n)$  — числа разбиений  $n$  не более чем на  $M$  частей, не превосходящих  $N$ . Эти же многочлены возникают и при изучении конечных векторных пространств.

**Теорема 13.1.** Пусть  $V_n(q)$  обозначает векторное пространство размерности  $n$  над конечным полем  $GF(q)$  с  $q$  (степень простого) элементами. Тогда имеется ровно  $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$  подпространств (пространства  $V_n(q)$ ) размерности  $m$ .

**З а м е ч а н и е.** Мы представим два доказательства. Первое просто и элементарно; второе показывает явную связь между разбиениями и конечными векторными пространствами.

Первое доказательство теоремы 13.1. Выделим  $m$ -мерные подпространства пространства  $V_n(q)$ ; для этого,

во-первых, выделим все возможные множества  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  из  $m$  линейно независимых векторов. Такие множества можно выбирать следующим образом: в качестве  $v_1$  можно взять любой из  $q^n - 1$  ненулевых векторов;  $v_2$  может быть любым из  $q^n - q$  векторов, лежащих вне подпространства, натянутого на  $v_1$ ;  $v_3$  может быть любым из  $q^n - q^2$  векторов, лежащих вне подпространства, натянутого на  $\{v_1, v_2\}$ , и так далее. Поэтому множество  $\{v_1, \dots, v_m\}$  может быть выделено

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \dots (q^n - q^{m-1})$$

способами.

Теперь каждое такое  $m$ -множество  $\{v_1, \dots, v_m\}$  порождает (своей линейной оболочкой) некоторое  $m$ -мерное подпространство пространства  $V_n(q)$ , однако разные  $m$ -множества могут порождать одно и то же подпространство. Действительно, в точности

$$(q^m - 1)(q^m - q) \dots (q^m - q^{m-1})$$

из них порождают одно и то же подпространство, поскольку это есть число способов выбрать подмножество из  $m$  линейно независимых векторов из  $V_n(q)$ . Поэтому число  $m$ -мерных подпространств пространства  $V_n(q)$  равно

$$\begin{aligned} & \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{m-1})}{(q^m - 1)(q^m - q) \dots (q^m - q^{m-1})} = \\ &= \frac{q^{\binom{m}{2}} (-1)^m (1 - q^n) (1 - q^{n-1}) \dots (1 - q^{n-m+1})}{q^{\binom{m}{2}} (-1)^m (1 - q^m) (1 - q^{m-1}) \dots (1 - q)} = \left[ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]. \end{aligned}$$

Второе доказательство теоремы 13.1. Выберем фиксированный базис в  $V_n(q)$ , скажем,  $u_1, \dots, u_n$ . Тогда, как мы знаем из линейной алгебры, каждое подпространство размерности  $m$  имеет канонический базис  $v_1, \dots, v_m$ , задаваемый по правилу

$$v_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} u_j \equiv (C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{in}), \quad (13.2.1)$$

где  $C_{ir_i} = 1$ ,  $C_{ij} = 0$ ,  $j > r_i$ ,  $C_{sr_i} = 0$ ,  $s < i$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $n \geq r_1 > r_2 > \dots > r_k \geq 1$ .

Для большей ясности рассмотрим случай  $n = 9$ ,  $m = 5$ ,  $r_1 = 8$ ,  $r_2 = 7$ ,  $r_3 = 5$ ,  $r_4 = 3$ ,  $r_5 = 2$ :

$$U_1 = (C_{11}, 0, 0, C_{14}, 0, C_{16}, 0, 1, 0),$$

$$U_2 = (C_{21}, 0, 0, C_{24}, 0, C_{26}, 1, 0, 0),$$

$$U_3 = (C_{31}, 0, 0, C_{34}, 1, 0, 0, 0, 0),$$

$$U_4 = (C_{41}, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$U_5 = (C_{51}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Расположение неопределенных  $C_{ij}$  в этой таблице соответствует графическому представлению Феррера

• • •  
• • •  
• •  
•  
•

разбиения  $3 + 3 + 2 + 1 + 1$  числа 10.

Таким образом, поскольку каждое неопределенное  $C_{ij}$  может быть выбрано  $q$  способами, то имеется  $q^{10}$  подпространств пространства  $V_q(q)$  с этой формой канонического базиса. В самом деле, видим, что с каждым разбиением  $r$  не более чем с  $m$  частями, не превосходящими  $n - m$ , можно описанной выше процедурой связать  $q^r$  различных подпространств размерности  $m$ . Стало быть, полное число подпространств размерности  $m$  равно (согласно теореме 3.1)

$$\sum_{r=0}^{\infty} p(n - m, m, r) q^r = \left[ \begin{matrix} (n - m) + m \\ m \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right].$$

Имеется много иных теорем, связывающих многочлены Гаусса с конечными векторными пространствами; часть из них вынесена в задачи.

### 13.3. Разбиения множеств

Начнем с простого вопроса: сколькими способами множество из  $n$  элементов можно разбить на множество из непересекающихся подмножеств, т. е. сколько существует различных «разбиений» множества  $n = \{1, 2, \dots, n\}$ ? Это число принято называть  $n$ -м числом Белла  $B_n$ .

В табл. 13.1 даются первоначальные значения чисел Белла и перечисляются сами разбиения.

Т а б л и ц а 13.1

$n$	Разбиения множества $\{1, 2, \dots, n\}$	$B_n$
0	$\emptyset$	1
1	$\{1\}$	1
2	$\{1, 2\}; \{1\}, \{2\}$	2
3	$\{1, 2, 3\}; \{1, 2\}, \{3\}; \{1, 3\}, \{2\}; \{2, 3\}, \{1\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$	5

Заметим, что если  $\pi = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ , где каждое  $\beta_i \subset \{1, 2, \dots, n\} = \mathbf{n}$ , то  $\pi$  есть разбиение множества  $\mathbf{n}$ , если  $\bigcup_{i=1}^m \beta_i = \mathbf{n}$  и  $\beta_i \cap \beta_j = \emptyset$  (пустое множество) при  $i \neq j$ . Эти  $\beta_i$  называются *блоками* разбиения  $\pi$ . Заметим, что имеется единственное разбиение (в смысле гл. 1) числа  $n$ , связанное с каждым  $\pi$ , именно, разбиение  $\lambda(\pi)$ , части которого — числа  $|\beta_1|, |\beta_2|, |\beta_3|, \dots, |\beta_m|$ , где  $|\beta_i|$  — число элементов в блоке  $\beta_i$ .

Для упрощения обозначений введем следующие сокращения, связанные с разбиением  $\lambda = (n_1 n_2 \dots n_m) = (1^{r_1} 2^{r_2} 3^{r_3} \dots)$  числа  $n$ :

$$\lambda! = n_1! n_2! n_3! \dots n_m! = 1!^{r_1} 2!^{r_2} 3!^{r_3} \dots,$$

$$|\lambda| = r_1! r_2! r_3! \dots,$$

$$\text{sign } \lambda = (-1)^{r_2 + 2r_3 + 3r_4 + \dots} = (-1)^{n - r_1 - r_2 - r_3 - \dots} = (-1)^{\sigma(\lambda) - \#(\lambda)}.$$

**Теорема 13.2.** Для каждого разбиения  $\lambda = (1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots m^{\lambda_m})$  числа  $n$  имеется ровно

$$\frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_m! (1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \dots (m!)^{\lambda_m}} = \frac{n!}{|\lambda| |\lambda|!}$$

разбиений  $\pi$  множества  $\mathbf{n}$ , для которых  $\lambda(\pi) = \lambda$ .

**Доказательство.** Начнем со стандартной интерпретации полиномиального коэффициента; именно, имеется ровно

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_j!} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_j} \quad (13.3.1)$$

упорядоченных  $j$ -систем подмножеств  $(S_1, \dots, S_j)$ , взаимно не пересекающихся, объединением своим совпадающих с множеством  $\{1, 2, \dots, n\}$ , и  $|S_i| = n_i$ . Чтобы убедиться в этом, заметим, что множество  $S_1$  может быть выбрано  $\binom{n}{n_1}$  способами, а оставшиеся  $j-1$  множеств могут быть выбраны

$$\binom{n - n_1}{n_2, \dots, n_j}$$

способами. Следовательно,

$$\begin{aligned} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_j} &= \binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2, n_3, \dots, n_j} = \\ &= \binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \binom{n - n_1 - n_2}{n_3, n_4, \dots, n_j} = \dots \\ &= \binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \dots \binom{n - n_1 - n_2 - \dots - n_{j-1}}{n_j} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_j!}. \end{aligned} \quad (13.3.2)$$

Поэтому, если имеется  $\lambda_1$  одноэлементных подмножеств,  $\lambda_2$  двухэлементных подмножеств и так далее, то число  $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)$ -систем из подмножеств, разбивающих  $n$ , равно

$$\frac{n!}{(1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \dots (m!)^{\lambda_m}}. \quad (13.3.3)$$

Некоторые из таких «упорядоченных» разбиений могут соответствовать одному и тому же разбиению числа  $n$ ; действительно, одноэлементные подмножества могут быть переставлены  $\lambda_1!$  способами, двухэлементные подмножества —  $\lambda_2!$  способами и так далее; следовательно, число разбиений  $\pi$  множества  $n$  с  $\lambda(\pi) = \lambda$  есть в точности число из (13.3.3), деленное на  $\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_m!$ , что и дает требуемое.

**Т е о р е м а 13.3.** *Для чисел Белла выполняются следующие формулы:*

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k, \quad (13.3.4)$$

$$B_n = Y_n(1, 1, \dots, 1) \quad (13.3.5)$$

(где  $Y_n(g_1, \dots, g_n)$  — многочлен Белла, определенный в (12.3.2)),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} = \exp \{e^x - 1\}. \quad (13.3.6)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Докажем (13.3.4), используя простое комбинаторное рассуждение. Другие тождества следуют непосредственно из свойств многочленов Белла, описанных в гл. 12.

Имеется  $B_{n+1}$  разбиений множества  $n+1 = \{1, 2, \dots, n+1\}$ . Теперь  $n+1$  лежит в некотором блоке объема  $k+1$ , где  $0 \leq k \leq n$  и имеется, очевидно,  $\binom{n}{k}$  возможностей для выбора такого блока. Оставшееся множество из  $n-k$  чисел может быть разбито  $B_{n-k}$  способами. Поэтому, суммируя по всем допустимым  $k$ , видим, что

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k,$$

что и есть (13.3.4).

Равенство (13.3.4) вместе с начальным условием  $B_0 = 1$  однозначно определяет числа Белла. Согласно (12.3.4) видим, что  $Y_n(1, 1, \dots, 1)$  удовлетворяет той же самой рекуррентности, а поскольку  $Y_0(1, 1, \dots, 1) = 1$ , то это влечет, что  $B_n = Y_n(1, 1, \dots, 1)$  для всех  $n$ , так что и (13.3.5) доказано.

Наконец, согласно (12.3.6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(1, 1, \dots, 1) x^n}{n!} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right\} = \exp \{e^x - 1\},$$

что и дает (13.3.6).

Для наших дальнейших приложений к симметрическим функциям в § 13.4 мы должны кратко рассмотреть решетку  $L_n$  разбиений множества  $\{1, 2, \dots, n\} = \mathbf{n}$ . Наша цель теперь состоит в получении теоремы 13.9, дающей удобную формулу для вычисления мёбиус-функции этой решетки.

Во-первых, введем *частичный порядок* на  $L_n$  (множестве всех разбиений  $\mathbf{n}$ ), полагая, что  $\pi_1 \leq \pi_2$  всякий раз, как каждый блок из  $\pi_2$  содержится в некотором блоке из  $\pi_1$ . Легко проверяется, что  $L_n$ , наделенное таким частичным порядком, образует решетку. Объединение  $\pi_1 \vee \pi_2$  есть грубейшее общее подразбиение  $\pi_1$  и  $\pi_2$ ; именно,  $i$  и  $j$  расположены в одном блоке в  $\pi_1 \vee \pi_2$  тогда и только тогда, когда они лежат в одном блоке в  $\pi_1$  и в одном блоке в  $\pi_2$ . Пересечение  $\pi_1 \wedge \pi_2$ , с другой стороны, определяется тем условием, что  $i$  и  $j$  лежат в одном блоке в  $\pi_1 \wedge \pi_2$  тогда и только тогда, когда существует цепь  $i = i_0, i_1, i_2, \dots, i_r = j$  такая, что, для  $0 \leq m < r$ ,  $i_m$  и  $i_{m+1}$  лежат в одном блоке в  $\pi_1$  или в  $\pi_2$ . (Нулем 0 решетки  $L_n$  является разбиение  $\{n\}$ , а единицей 1 — разбиение  $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$ .)

*Алгебра инцидентности* над решеткой  $L_n$  есть алгебра действительнозначных функций от двух переменных:  $f: L_n \times L_n \rightarrow \mathbf{R}$ , согласованных с введенным на  $L_n$  отношением частичного порядка:  $\pi_1 \not\leq \pi_2 \Rightarrow f(\pi_1, \pi_2) = 0$ , в которой сложение есть обычное поточечное сложение функций, а умножение определяется сверткой

$$(fg)(\pi_1, \pi_2) = \sum_{\pi_1 \leq \pi \leq \pi_2} f(\pi_1, \pi) g(\pi, \pi_2). \quad (13.3.7)$$

Единицей этой алгебры, очевидно, является  $\delta$ -функция Кронекера:  $\delta(\pi_1, \pi_2) = 1$ , если  $\pi_1 = \pi_2$ , и  $\delta(\pi_1, \pi_2) = 0$ , если  $\pi_1 \neq \pi_2$ . Другая фундаментальная функция есть дзета-функция:  $\zeta(\pi_1, \pi_2) = 1$ , если  $\pi_1 \leq \pi_2$ ;  $\zeta(\pi_1, \pi_2) = 0$ , если  $\pi_1 \not\leq \pi_2$ .

Следующие два результата сформулированы для решетки разбиений  $L_n$ , однако они справедливы во много более общей ситуации, когда  $L_n$  заменяется на произвольное локально конечное частично упорядоченное множество.

**Л е м м а 13.4.** *Дзета-функция  $\zeta(\pi_1, \pi_2)$  допускает обращение в алгебре инцидентности.*

Эта обратная к  $\zeta$  функция называется *мёбиус-функцией* и обозначается  $\mu(\pi_1, \pi_2)$ .



**Доказательство.** Построение проведем рекурсивно индукцией по числу элементов в сегменте

$$[\pi_1, \pi_2] = \{\pi \mid \pi_1 \leq \pi \leq \pi_2\}.$$

Если этот сегмент имеет лишь один элемент, то, очевидно,  $\pi_1 = \pi_2$  и  $\mu(\pi_1, \pi_1) = 1$ . Если  $\mu(\pi_1, \pi_2)$  определена всякий раз, как сегмент  $[\pi_1, \pi_2]$  имеет менее  $k$  элементов, то видим, что если  $[\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2]$  имеет  $k$  элементов, то

$$\mu(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2) = - \sum_{\bar{\pi}_1 < \pi \leq \bar{\pi}_2} \mu(\bar{\pi}_1, \pi),$$

что и определяет  $\mu(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)$  однозначно.

**Теорема 13.5** (обращение Мёбиуса). Пусть  $f(\pi)$  и  $g(\pi)$  — две действительнoзначные функции, определенные на  $L_n$ . Тогда

$$g(\pi_0) = \sum_{\pi \leq \pi_0} f(\pi) \quad \text{для всех } \pi_0 \in L_n \quad (13.3.8)$$

тогда и только тогда, когда

$$f(\pi_0) = \sum_{\pi \leq \pi_0} g(\pi) \mu(\pi, \pi_0) \quad \text{для всех } \pi_0 \in L_n. \quad (13.3.9)$$

Кроме того,

$$g(\pi_0) = \sum_{\pi \geq \pi_0} f(\pi) \quad \text{для всех } \pi_0 \in L_n \quad (13.3.10)$$

тогда и только тогда, когда

$$f(\pi_0) = \sum_{\pi \geq \pi_0} \mu(\pi_0, \pi) g(\pi) \quad \text{для всех } \pi_0 \in L_n. \quad (13.3.11)$$

**З а м е ч а н и е.** Иначе обращение Мёбиуса показывают иногда как «обобщенный принцип включения-исключения», или «обобщенные методы решета». Когда вместо  $L_n$  рассматривается решетка подмножеств конечного множества, упорядоченных по включению, обращение Мёбиуса и представляет собой классический принцип включения-исключения.

**Доказательство.** Каждая из четырех импликаций устанавливается однотипно. Докажем лишь, что (13.3.8) влечет (13.3.9). Предполагая, что (13.3.8) имеет место, видим, что

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \leq \pi_0} g(\pi) \mu(\pi, \pi_0) &= \sum_{\pi \leq \pi_0} \sum_{\pi' \leq \pi} f(\pi') \mu(\pi, \pi_0) = \\ &= \sum_{\pi' \leq \pi_0} f(\pi') \sum_{\pi' \leq \pi \leq \pi_0} \mu(\pi, \pi_0) = \sum_{\pi' \leq \pi_0} f(\pi') (\zeta \mu)(\pi', \pi_0) = \\ &= \sum_{\pi' \leq \pi_0} f(\pi') \delta(\pi', \pi_0) = f(\pi_0). \end{aligned}$$

Наш следующий результат обеспечивает необходимую основу для вычисления  $\mu(0, I)$ , где  $0$  — минимальный элемент решетки  $L_n$  ( $0 = \{\{1, 2, \dots, n\}\}$ ), а  $I$  — максимальный элемент  $L_n$  ( $I = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ ).

**О п р е д е л е н и е 13.1.** Пусть  $\varphi$  — функция из  $\mathbf{n}$  в множестве  $C$ . Образует разбиение  $\pi$ , полагая  $i, j$  лежащими в одном блоке тогда и только тогда, когда  $\varphi(i) = \varphi(j)$ ; разбиение  $\alpha$  называют *ядром* функции  $\varphi$  и пишут  $\text{Кер } \varphi = \pi$ .

**Л е м м а 13.6.** Пусть  $\pi \in L_n$ , и пусть  $C$  — множество с  $X$  элементами. Пусть  $f(\pi)$  обозначает число функций  $\varphi$  из  $\mathbf{n}$  в  $C$  с  $\text{Кер } \varphi = \pi$ . Тогда

$$f(\pi) = X(X-1) \dots (X - v(\pi) + 1) \equiv X_{v(\pi)}, \quad (13.3.12)$$

где  $v(\pi)$  есть число блоков в  $\pi$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Элементы первого блока можно отобразить на один из  $X$  элементов множества  $C$ ; элементы второго блока можно отобразить на  $X-1$  оставшихся элементов множества  $C$  и так далее. Поэтому полное число таких отображений есть

$$X(X-1)(X-2) \dots (X - v(\pi) + 1) = (X)_{v(\pi)}.$$

**С л е д с т в и е 13.7.** Для каждого  $\pi_0 \in L_n$  выполняются равенства

$$\sum_{\pi \leq \pi_0} (X)_{v(\pi)} = X^{v(\pi_0)}, \quad (13.3.13)$$

$$\sum_{\pi \leq \pi_0} X^{v(\pi)} \mu(\pi, \pi_0) = (X)_{v(\pi_0)}. \quad (13.3.14)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Равенство (13.3.14) следует из (13.3.13) по теореме 13.5. Для доказательства (13.3.13) подсчитаем двумя способами число функций из  $\mathbf{n}$  в  $C$ , остающихся постоянными на блоках разбиения  $\pi_0$ . Ясно, что имеется  $X^{v(\pi_0)}$  таких функций. С другой стороны, можно различать эти функции в соответствии с их ядром  $\pi$ . Допустимыми ядрами  $\pi$  являются лишь те разбиения, которые «выделяемы» из  $\pi_0$ , т. е. такие  $\pi$ , что  $\pi \leq \pi_0$ . Поэтому согласно лемме 13.6 число функций из  $\{1, 2, \dots, n\}$  в  $C$ , остающихся постоянными на блоках  $\pi$ , равно  $(X)_{v(\pi)}$ ; стало быть,

$$\sum_{\pi \leq \pi_0} (X)_{v(\pi)} = X^{v(\pi_0)}.$$

Введем теперь хорошо известные числа Стирлинга первого рода  $s(n, k)$  и числа Стирлинга второго рода  $S(n, k)$ :

$$(X)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) X^k, \quad (13.3.15)$$

$$X^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) (X)_k. \quad (13.3.16)$$

Т е о р е м а 13.8.

$$\sum_{\substack{\pi \in L_n \\ v(\pi)=k}} 1 = S(n, k), \quad (13.3.17)$$

$$\sum_{\substack{\pi \in L_n \\ v(\pi)=k}} \mu(\pi, I) = s(n, k), \quad (13.3.18)$$

$$\mu(0, I) = (-1)^{n-1} (n-1)!. \quad (13.3.19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (13.3.13) при  $\pi_0 = I$  и, значит,  $v(\pi_0) = n$  видим, что

$$X^n = \sum_{\pi \in L_n} (X)_{v(\pi)} = \sum_{k=0}^n (X)_k \left( \sum_{\substack{\pi \in L_n \\ v(\pi)=k}} 1 \right), \quad (13.3.20)$$

но числа  $S(n, k)$  однозначно определяются из (13.3.16), а поскольку (13.3.20) имеет в точности ту же форму, получаем (13.3.17).

Равенство (13.3.18) следует из (13.3.14) и (13.3.15) в точности тем же способом.

Наконец, поскольку имеется единственное одноблочное разбиение множества  $n = \{1, 2, \dots, n\}$  (именно, 0), то согласно (13.3.18)

$$\begin{aligned} \mu(0, I) = s(n, 1) &= \text{коэффициент при } X \text{ в } X(X-1)\dots(X-n+1) = \\ &= (-1)^{n-1} (n-1)!. \end{aligned}$$

Т е о р е м а 13.9. *Предположим, что  $\pi_1, \pi_2 \in L_n$ ,  $\pi_1 \leq \pi_2$ . Определим разбиение  $\lambda(\pi_1, \pi_2) = (1^{r_1} 2^{r_2} \dots m^{r_m})$ , где  $r_i$  — число блоков разбиения  $\pi_1$ , состоящих в точности из  $i$  блоков разбиения  $\pi_2$ . Тогда*

$$\mu(\pi_1, \pi_2) = (-1)^{\sum_{i=1}^m (r_i-1)} \prod_{i=1}^m (i-1)!^{r_i}, \quad r_i > 0. \quad (13.3.21)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Анализ сегмента  $[\pi_1, \pi_2]$  показывает, что он изоморфен прямому произведению  $r_1$  копий  $L_1$ ,  $r_2$  копий  $L_2$ , ...,  $r_m$  копий  $L_m$ . Нетрудно видеть, что мёбиус-функция произведения частично упорядоченных символов равна произведению мёбиус-функций этих сегментов. А это сразу и дает (13.3.21).

#### 13.4. Комбинаторика симметрических функций

Если в § 13.3 ограничиться рассмотрением функций, область определения которых есть множество из  $n$  элементов, то мы сразу переходим к элементарной теории симметрических функций. Такой подход к симметрическим функциям не только обеспечивает про-

стое доказательство фундаментальной теоремы симметрических функций (теорема 13.12), но, что более важно, влечет вполне вычислимые формулы для коэффициентов во многих классических тождествах с симметрическими функциями (см. теоремы 13.11 и 13.12).

Рассмотрим теперь множество  $F$  функций из  $\mathbf{n} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  в счетное множество  $C = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ . Элементы этого множества  $C$  рассматриваются как неопределенности для кольца многочленов со счетным числом переменных над полем действительных чисел.

**О п р е д е л е н и е 13.2.** Для каждой функции  $f \in F$  ее *производящая функция*  $\gamma(f)$  определяется по правилу

$$\gamma(f) = \prod_{d \in \mathbf{n}} f(d) = \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{|f^{-1}(x_i)|},$$

а если  $T \subset F$ , то

$$\gamma(T) = \sum_{f \in T} \gamma(f).$$

Наши предварительные интересы относятся к трем специальным подмножествам множества  $F$ :

$$\mathcal{K}_{\pi} = \{f \in F \mid \text{Ker } f = \pi\}, \quad (13.4.1)$$

$$\mathcal{P}_{\pi} = \{f \in F \mid \text{Ker } f \leq \pi\}, \quad (13.4.2)$$

$$\mathcal{A}_{\pi} = \{f \in F \mid \text{Ker } f \vee \pi = I\}, \quad (13.4.3)$$

и пусть  $k_{\pi} = \gamma(\mathcal{K}_{\pi})$ ,  $s_{\pi} = \gamma(\mathcal{P}_{\pi})$ ,  $a_{\pi} = \gamma(\mathcal{A}_{\pi})$ .

Заметим, что индекс  $\pi$  в каждом из  $k_{\pi}$ ,  $s_{\pi}$  и  $a_{\pi}$  означает разбиение множества  $\mathbf{n}$ . Следующее определение относится уже к индексам, являющимся разбиениями целых.

**О п р е д е л е н и е 13.3.** Для каждого целого  $n$  и всякого разбиения  $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m)$  этого  $n$  определяем

$$k_{\lambda} = \sum x_{i_1}^{\lambda_1} x_{i_2}^{\lambda_2} \dots x_{i_m}^{\lambda_m},$$

$$a_n = \sum x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}, \quad a_{\lambda} = a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} \dots a_{\lambda_n},$$

$$s_n = \sum x_i^n, \quad s_{\lambda} = s_{\lambda_1} s_{\lambda_2} \dots s_{\lambda_m}.$$

Следующая теорема устанавливает связь между функциями, индексом которых является разбиение множества  $\mathbf{n}$ , и функциями, индексом которых является разбиение целого.

**Т е о р е м а 13.10.** Для каждого разбиения  $\pi$  множества  $\mathbf{n}$  выполняются равенства

$$k_{\pi} = |\lambda(\pi)| k_{\lambda(\pi)}, \quad (13.4.4)$$

$$s_{\pi} = s_{\lambda(\pi)}, \quad (13.4.5)$$

$$a_{\pi} = \lambda(\pi)! a_{\lambda(\pi)}. \quad (13.4.6)$$

**Доказательство.** Пусть  $\lambda(\pi) = (1^{r_1} 2^{r_2} 3^{r_3} \dots) = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ . Прежде всего проверим  $k_\pi$ . Если  $f \in \mathcal{K}_\pi$ , то  $\text{Ker } f = \pi$  и, значит,

$$\gamma(f) = x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_m}^{n_m}.$$

Кроме того, ясно, что  $r_1! r_2! r_3! \dots = |\lambda(\pi)|$  элементов из  $k_\pi$  имеют в точности ту же производящую функцию. Следовательно,

$$k_\pi = \sum |\lambda(\pi)| x_{i_1}^{n_1} \dots x_{i_m}^{n_m} = |\lambda(\pi)| k_{\lambda(\pi)}.$$

Теперь исследуем  $\mathcal{S}_\pi$ . Из (13.4.2) видим, что  $f \in \mathcal{S}_\pi$  тогда и только тогда, когда  $f$  — постоянная на блоках  $\pi$ . Поэтому, если блоки  $\pi$  суть  $B_1, B_2, \dots, B_m$ , то

$$\begin{aligned} s_\pi &= \gamma(\mathcal{S}_\pi) = \sum_{f \in \mathcal{S}} \gamma(f) = \\ &= \sum_{f \in \mathcal{S}_\pi} \gamma(f|_{B_1}) \gamma(f|_{B_2}) \dots \gamma(f|_{B_m}) = \prod_{i=1}^m \left( \sum_{\substack{f: B_i \rightarrow C \\ f = \text{const}}} \gamma(f) \right) = \\ &= \prod_{i=1}^m (x_1^{|B_i|} + x_2^{|B_i|} + x_3^{|B_i|} + \dots) = \prod_{i=1}^m s_{|B_i|} = s_{\lambda(\pi)}. \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим  $\mathcal{A}_\pi$ . Для каждой  $f \in \mathcal{A}_\pi$  имеем  $\text{Ker } f \vee \pi = I$ ; это означает, что два члена из одного блока не могут быть в одном блоке  $\pi$ . Последняя формулировка эквивалентна тому, что  $f$  взаимно однозначна на блоках разбиения  $\pi$ . Стало быть, если блоки  $\pi$  —  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ , то

$$a_\pi = \gamma(\mathcal{A}_\pi) = \sum_{f \in \mathcal{A}_\pi} \gamma(f|_{B_1}) \gamma(f|_{B_2}) \dots \gamma(f|_{B_m}) = \prod_{i=1}^m \left( \sum_{f: B_i \rightarrow C} \gamma(f) \right);$$

в последней сумме  $f$  — взаимно однозначные функции.

Теперь каждая  $\gamma(f)$  в последнем выражении имеет форму  $x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_{|B_i|}}$  и каждый член получается из  $|B_i|!$  таких функций. Поэтому

$$\begin{aligned} a_\pi &= \prod_{i=1}^m \left( \sum |B_i|! x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_{|B_i|}} \right) = \\ &= |B_1|! |B_2|! \dots |B_m|! a_{|B_1|} a_{|B_2|} \dots a_{|B_m|} = \lambda(\pi)! a_{\lambda(\pi)}. \end{aligned}$$

Из следующего результата будет легко следовать фундаментальная теорема о симметрических функциях (теорема 13.12).

**Т е о р е м а 13.11.** *Для каждого разбиения  $\pi$  множества  $n$  выполняются равенства*

$$k_\pi = \sum_{\sigma \leq \pi} \mu(\sigma, \pi) s_\sigma, \quad (13.4.7)$$

$$k_\pi = \sum_{\sigma \leq \pi} \frac{\mu(\sigma, \pi)}{\mu(\sigma, I)} \sum_{\tau \geq \sigma} \mu(\sigma, \tau) a_\tau. \quad (13.4.8)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Начнем с замечания о том, что из (13.4.1), (13.4.2) и (13.4.3) следует

$$s_\pi = \sum_{\sigma \leq \pi} k_\sigma, \quad (13.4.9)$$

$$a_\pi = \sum_{\sigma: \sigma \vee \pi = I} k_\sigma. \quad (13.4.10)$$

Равенство (13.4.9) легко преобразуется обращением Мёбиуса (13.3.8) к виду

$$k_\pi = \sum_{\sigma \leq \pi} s_\sigma \mu(\sigma, \pi),$$

что и есть (13.4.7).

Вторая половина этой теоремы несколько сложнее и требует двойного применения обращения Мёбиуса. Согласно (13.4.10) имеем

$$\begin{aligned} a_\pi &= \sum_{\sigma} \delta(\sigma \vee \pi, I) k_\sigma = \\ &= \sum_{\sigma} \left( \sum_{\tau \geq \sigma \vee \pi} \mu(\tau, I) \right) k_\sigma = \sum_{\tau \geq \pi} \mu(\tau, I) \sum_{\sigma \leq \tau} k_\sigma. \end{aligned}$$

Поэтому по принципу обращения Мёбиуса

$$\mu(\pi, I) \sum_{\sigma \leq \pi} k_\sigma = \sum_{\tau \geq \pi} \mu(\pi, \tau) a_\tau,$$

или

$$\sum_{\sigma \leq \pi} k_\sigma = \sum_{\tau \geq \pi} \frac{\mu(\pi, \tau)}{\mu(\pi, I)} a_\tau, \quad (13.4.11)$$

что допустимо, поскольку  $\mu(\pi, I) \neq 0$ . Применяя обращение Мёбиуса к (13.4.11), получаем требуемое:

$$k_\pi = \sum_{\sigma \leq \pi} \mu(\sigma, \pi) \sum_{\tau \geq \sigma} \frac{\mu(\sigma, \tau)}{\mu(\sigma, I)} a_\tau.$$

**Т е о р е м а 13.12** (фундаментальная теорема о симметрических функциях). *Каждая полиномиальная симметрическая функция от переменных  $x_1, x_2, \dots$  является также многочленом от  $a_1, a_2, \dots$*

**Доказательство.** Пусть  $p(x_1, x_2, \dots)$  — многочлен, симметричный по  $x_i$ . Тогда

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots) &= \\ &= \sum_{N_i \geq n_i \geq 0} c_{n_1 n_2 \dots n_m} \sum x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_m}^{n_m} = \\ &= \sum_{N_i \geq n_i \geq 0} c_{n_1 n_2 \dots n_m} k_{(n_1, n_2, \dots, n_m)} = \\ &= \sum_{N_i \geq n_i \geq 0} c_{n_1 n_2 \dots n_m} \frac{1}{|\lambda(\pi)|} k_\pi \end{aligned}$$

(где каждое  $\pi$  — это некоторое разбиение некоторого множества  $n$  ( $n \leq N_1 + \dots + N_m$ ) с  $m$  блоками размеров  $n_1, n_2, \dots, n_m$ ); поэтому

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots) &= \\ &= \sum_{N_i \geq n_i \geq 0} c_{n_1 n_2 \dots n_m} \frac{1}{|\lambda(\pi)|} \left( \sum_{\sigma \leq \pi} \frac{\mu(\sigma, \pi)}{\mu(\sigma, I)} \sum_{\tau \geq \sigma} \mu(\sigma, \tau) a_\tau \right) = \\ &= \sum_{N_i \geq n_i \geq 0} c_{n_1 n_2 \dots n_m} \frac{1}{|\lambda(\pi)|} \left( \sum_{\sigma \leq \pi} \frac{\mu(\sigma, \pi)}{\mu(\sigma, I)} \sum_{\tau \geq \sigma} \mu(\sigma, \tau) \lambda(\tau)! a_{\lambda(\tau)} \right), \end{aligned}$$

а поскольку каждое  $a_{\lambda(\tau)}$  есть произведение некоторых  $a_i$ , получаем требуемое.

### Задачи

1. Если рассматривается векторное пространство  $V_n(q)$  размерности  $n$  над полем  $GF(q)$  и подсчитывается число линейных преобразований  $f$  этого  $V_n(q)$  в пространство  $\mathcal{X}$  с  $X$  элементами над  $GF(q)$ , удовлетворяющих условию  $f(V_n(q)) \cap \mathcal{Z} = (0)$ , где  $\mathcal{Z}$  (с  $Z$  элементами) — это подпространство пространства  $\mathcal{X}$ , то легко показать, что число таких преобразований равно

$$(X - Z)(X - Zq) \dots (X - Zq^{n-1}).$$

2. Если в задаче 1 дополнительно предположить, что  $f(V_n(q)) \cap \mathcal{Y}$  имеет размерность  $k$ , где  $\mathcal{Y}$  — подпространство пространства  $\mathcal{X}$  с  $Y$  элементами, то число таких  $f$  равно

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (Y - Z)(Y - Zq) \dots (Y - Zq^{k-1})(X - Y)(X - Yq) \dots (X - Yq^{n-k-1}).$$

3. Задачи 1 и 2 влекут тождество

$$\prod_{i=0}^{n-1} (X - Zq^i) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \prod_{j=0}^{k-1} (Y - Zq^j) \prod_{h=0}^{n-k-1} (X - Yq^h).$$

4. Задачу 3 можно также вывести из следствия 2.4.

5. Линейный оператор  $L$  на многочленах от  $X$  над полем комплексных чисел, определяемый по правилу

$$L((X-1)(X-q)\dots(X-q^{n-1}))=1,$$

удовлетворяет равенству

$$L(X^n) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

6. Пусть  $V_m(q)$  — это  $m$ -мерное подпространство пространства  $V_{m+n}(q)$ . Подсчитывая  $h$ -мерные подпространства пространства  $V_{m+n}(q)$ , пересекающие  $V_m(q)$  по  $k$ -мерному подпространству, показать, что

$$\sum_{k=0}^h \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ h-k \end{bmatrix} q^{k(m-h+k)} = \begin{bmatrix} m+n \\ h \end{bmatrix}.$$

7. Для любой последовательности целых  $a_1, a_2, \dots, a_n$  такой, что  $a_{i+1} - a_i = 0$  или 1 при  $1 \leq i \leq n$ , доказать, что

$$\begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n q^{\binom{n-k}{2} (a_{k+1} - a_k)} \begin{bmatrix} a_k \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n - a_{k+1} \\ n - k \end{bmatrix}.$$

8. Из (13.3.16) вывести, что

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k).$$

9. Из (13.3.16) и тривиального тождества

$$X^{n+1} = X(1 + (X-1)^n)$$

вывести, что

$$S(n+1, k) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} s(j, k-1).$$

10. Из задачи 8 следует, что если  $S_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k, k) t^n$ , то

$$S_k(t) = \frac{S_{k-1}(t)}{1-kt}.$$

Поэтому

$$S_k(t) = \frac{1}{(1-t)(1-2t)\dots(1-kt)}.$$

11. Для любого разбиения  $\lambda$  числа  $n$  рассмотрим  $a_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} C_{\lambda\mu} k_\mu$ . Из теоремы 13.11 вывести, что  $C_{\mu\lambda} = C_{\lambda\mu}$ .

12. Для каждой пары положительных целых  $n$  и  $k$  всякое разбиение  $n!k$  на части, не превосходящие  $n$ , есть в действительности сумма из  $k$  разбиений



числа  $n!$ . Например, имеется 37 разбиений  $18 = 3! \cdot 3$  на части, не превосходящие 3:

$$\begin{aligned}
 (3^6) &= (3^2) + (3^2) + (3^2) & (2^9) &= (2^3) + (2^3) + (2^3) \\
 (1\ 2\ 3^5) &= (1\ 2\ 3) + (3^2) + (3^2) & (1^3 2^3 3^3) &= (1^3 3) + (2^3) + (3^2) \\
 (1^3 3^5) &= (1^3 3) + (3^2) + (3^2) & (1^5 2^2 3^3) &= (1^3 3) + (1^2 2^2) + (3^2) \\
 (2^3 3^4) &= (2^3) + (3^2) + (3^2) & (1^7 2\ 3^3) &= (1^6) + (1\ 2\ 3) + (3^2) \\
 (1^2 2^2 3^4) &= (1^2 2^2) + (3^2) + (3^2) & (1^9 3^3) &= (1^6) + (1^3 3) + (3^2) \\
 (1^4 2\ 3^4) &= (1^4 2) + (3^2) + (3^2) & (2^6 3^2) &= (2^3) + (2^3) + (3^2) \\
 (1^6 3^4) &= (1^6) + (3^2) + (3^2) & (1^2 2^5 3^2) &= (1^2 2^2) + (2^3) + (3^2) \\
 (1\ 2^4 3^3) &= (1\ 2\ 3) + (2^3) + (3^2) & (1^4 2^4 3^2) &= (1^4 2) + (2^3) + (3^2) \\
 (1^8 2^2 3^2) &= (1^6) + (1^2 2^2) + (3^2) & (1^6 2^3 3^2) &= (1^6) + (2^3) + (3^2) \\
 (1^{10} 2\ 3^2) &= (1^6) + (1^4 2) + (3^2) & (1^2 2^8) &= (1^2 2^2) + (2^3) + (2^3) \\
 (1^{12} 3^2) &= (1^6) + (1^6) + (3^2) & (1^4 2^7) &= (1^4 2) + (2^3) + (2^3) \\
 (1\ 2^7 3) &= (1\ 2\ 3) + (2^3) + (2^3) & (1^6 2^6) &= (1^6) + (2^3) + (2^3) \\
 (1^3 2^6 3) &= (1^3 3) + (2^3) + (2^3) & (1^8 2^5) &= (1^6) + (1^2 2^2) + (2^3) \\
 (1^5 2^5 3) &= (1^3 3) + (1^2 2) + (2^3) & (1^{10} 2^4) &= (1^6) + (1^4 2) + (2^3) \\
 (1^7 2^4 3) &= (1^6) + (1\ 2\ 3) + (2^3) & (1^{12} 2^3) &= (1^6) + (1^6) + (2^3) \\
 (1^9 2^3 3) &= (1^6) + (1^3 3) + (2^3) & (1^{14} 2^2) &= (1^6) + (1^6) + (1^2 2^2) \\
 (1^{11} 2^2 3) &= (1^6) + (1^4 2) + (1\ 2\ 3) & (1^{16} 2) &= (1^6) + (1^6) + (1^4 2) \\
 (1^{13} 2\ 3) &= (1^6) + (1^6) + (1\ 2\ 3) & (1^{18}) &= (1^6) + (1^6) + (1^6) \\
 (1^{15} 3) &= (1^6) + (1^6) + (1^3 3)
 \end{aligned}$$

13. Используя мёбиус-функцию решетки  $L_n$  и теорему 13.2, вывести тождество Платонова

$$1 = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (k-1)! \sum_{\lambda \vdash n} \frac{n!}{|\lambda|! \lambda!} \prod_{i=1}^k B_{n_i}.$$

14. Доказать тождество

$$1 = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} G_{n-k} (-1)^k q^{\binom{k}{2}},$$

где  $G_n$  — так называемое число Галуа:

$$G_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Для вывода этого тождества удобно использовать мёбиус-функцию решетки  $L(V_n(q))$  (решетка всех подпространств пространства  $V_n(q)$ , упорядоченных по включению): если  $V, W \in L(V_n(q))$ ,  $V \subseteq W$  и  $d(V)$  обозначает размерность  $V$ , то

$$\mu(V, W) = (-1)^{d(W)-d(V)} q^{\binom{d(W)-d(V)}{2}}.$$

15. На множестве всех разбиений числа  $n$  можно ввести отношение частичного порядка, естественным образом согласованное с частичным порядком ре-

сетки  $L_n$ . Пусть  $P(n)$  обозначает множество всех разбиений числа  $n$ ; для  $p, q \in P(n)$  полагаем  $q \leq p$  тогда и только тогда, когда сложением некоторых частей разбиения  $q$  можно получить разбиение  $p$ . Например, при  $n = 6$  имеем  $(3 \ 2 \ 1) \leq (3^2)$ , так как  $(3^2) = (3) + (2 + 1)$ , но  $(2^3) \not\leq (3^2)$ . Единица в  $P(n)$  — одноблочное разбиение, а нуль — разбиение  $(1^n)$ .

Через  $P_k(n)$  обозначим множество всех разбиений  $n$  ровно с  $k$  частями. Доказать, что если  $k = k(l, n)$  — наименьшее  $k$ , при котором

$$\forall p \in P_l(n), \quad \forall q \in P_k(n), \quad p \geq q,$$

то

$$k(l, n) = n - \left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor + 1,$$

где  $\lfloor x \rfloor$  — наименьшее целое, не меньшее  $x$ .

### З а м е ч а н и я

Материал § 13.2 взят у Кнута (1971). По связям между  $q$ -рядами и конечными векторными пространствами имеется обширная литература; для начального ознакомления можно обратиться к [15, 18, 10]. Из недавних работ в этой области отметим [7, 8, 9, 13, 14, 12, 26, 27, 1]; иные недавние работы на эту же тему см. в разделе Т35 в [19].

Литература о разбиениях конечных множеств весьма обширна (см. [23]). По этому вопросу большая часть изложенного здесь материала взята из [23, 25, 11].

Имеется много иных приложений разбиений в чистой и прикладной математике. Некоторые из таких приложений к физике даны в [31, 5]. Приложение разбиений к теории представлений симметрической группы уже отмечалось в гл. 11 (см. также [20, 22, 28]).

Разбиения числа  $n$  также допускают решетчатую структуру, связанную с частичным упорядочением:  $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s) \geq (\lambda'_1 \lambda'_2 \dots \lambda'_s)$ , когда  $\sum_{j=1}^i \lambda_j \geq \sum_{j=1}^i \lambda'_j$  для каждого  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Эта решетка подробно изучалась Брулавским (1973) и была применена Снаппером (1971) (для некоторых задач в теории групп).

Стенли (1972) развил анализ разбиений Мак-Магона (1916) для решения ряда комбинаторных задач; основной его инструмент из  $(P, \omega)$ -разбиений вводится в § 14.4.

Задачи 1, 2 — [27]; задача 5 — [26]; задачи 6, 7 — [4]; задача 6 представляет собой  $q$ -аналог суммирования Чу—Вандермонда и является специальным случаем следствия 2.4; задача 7 — это неожиданное и необычное обобщение задачи 6; задача 11 — [11]; задача 12 — [17].

Задачи 13, 14, 15 добавлены переводчиком. По поводу чисел Гаусса и решетки  $L(V_n(q))$  см. [26, 27, 24]; отношение частичного порядка на  $P_n$  из задачи 15 — в [33, 34, 38], функция  $k(l, n)$  вычислена в [35]. Приложения частично упорядоченного множества  $P(n)$  к вычислительной технике представлены в [34, 36, 38].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Andrews G. E. (1971). On the foundations to combinatorial theory. V. Eulerian differential operators. — *Studies in Appl. Math.* **50**, p. 345—375.
2. Auluck F. C. (1951). On some new types of partitions associated with generalized Ferrars graphs. — *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **47**, p. 679—686.
3. Auluck F. C., Kothari D. S. (1946). Statistical mechanics and the partition of numbers. — *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **42**, p. 272—277.

4. Bender E. A. (1971). A generalized  $q$ -binomial Vandermonde convolution. — *Discrete Math.* **1**, p. 115—119.
5. Bohr N., Kalckar F. (1937). On the transmutation of atomic nuclei by impact of material particles. — *Kgl. Danske Vidensk Selskab Mat. Fys. Medd.* **14**, № 10.
6. Brylawski T. (1973). The lattice of integer partitions. — *Discrete Math.* **6**, p. 201—219.
7. Carlitz L. (1954). Representations by quadratic forms in a finite field. — *Duke Math. J.* **21**, p. 123—137.
8. Carlitz L., Hodges J. H. (1955a). Representations by Hermitian forms in a finite field. — *Duke Math. J.* **22**, p. 393—405.
9. Carlitz L., Hodges J. H. (1955b). Distribution of bordered symmetric, skew and hermitian matrices in a finite field. — *J. reine angew. Math.* **195**, p. 192—201.
10. Dickson L. E. (1901). *Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory*. — Teubner, Leipzig (reprinted by Dover, New York, 1958).
11. Doubilet P. (1972). On the foundations of combinatorial theory, VII; Symmetric functions through the theory of distribution and occupancy. — *Studies in Appl. Math.* **51**, p. 377—396.
12. Fulton J. D. (1969). Symmetric involutory matrices over finite fields and modular rings of integers. — *Duke Math. J.* **36**, p. 401—407.
13. Hodges J. H. (1964). Simultaneous pairs of linear and quadratic matrix equations over a finite field. — *Math. Z.* **84**, p. 38—44.
14. Hodges J. H. (1965). A symmetric matrix equation over a finite field. *Math. Nachr.* **30**, p. 221—228.
15. Jordan C. (1870). *Traité des substitutions et des équations algébrique*. — Gauthier-Villars, Paris.
16. Knuth D. E. (1971). Subspaces, subsets, and partitions. — *J. Combinatorial Theory* **A10**, p. 178—180.
17. Knutson D. (1972). A lemma on partitions. — *Amer. Math. Monthly* **79**, p. 1111—1112.
18. Landsberg G. (1893). Über eine Anzahlbestimmung und eine damit zusammenhängende Reihe. — *J. reine angew. Math.* **111**, p. 87—88.
19. LeVeque W. J. (1974). Reviews in Number Theory, Vol. 5. — Amer. Math. Soc., Providence, R. I.
20. Littlewood D. E. (1950). *The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups*, 2nd ed. — Oxford Univ. Press, London and New York.
21. MacMahon P. A. (1916). *Combinatory Analysis*. Vol. 2. — Cambridge Univ. Press, London and New York (reprinted by Chelsea, New York, 1960).
22. Robinson G. de B. (1961). *Representation Theory of the Symmetric Group*. — Univ. of Toronto Press, Toronto.
23. Rota G. C. (1964a). The number of partitions of a set. — *Amer. Math. Monthly* **71**, p. 498—504.
24. Rota G. C. (1964b). On the foundations of combinatorial theory, I.: Theory of Möbius functions. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **2**, p. 340—368.
25. Rota G. C., Frucht R. (1965). Polinomios de Bell y particiones de conjuntos finitos. — *Scientia Rev. Ci. Técnica (Chile)* № 126, p. 5—10.
26. Rota G. C., Goldman J. (1969). The number of subspaces of a vector space. — In: *Recent Progress in Combinatorics* (W. Tutte, ed.), Academic Press, New York.
27. Rota G. C., Goldman J. (1970). On the foundations of combinatorial theory, IV. Finite vector spaces and Eulerian generating functions. — *Studies in Appl. Math.* **49**, p. 239—258.
28. Rutherford D. E. (1947). *Substitutional Analysis*. — Edinburgh Univ. Press, Edinburgh (reprinted by Hafner, New York, 1968).

29. Snapper E. (1971). Group characters and nonnegative integral matrices. — *J. Algebra* **19**, p. 520—535.
30. Stanley R. P. (1972). Ordered structures and partitions. — *Mem. Amer. Math. Soc.* **119**.
31. Temperley H. N. V. (1952) Statistical mechanics and the partition of numbers, II: The form of crystal surfaces.—*Proc. Cambridge Phil. Soc.* **48**, p. 683—697.
32. Wright E. M. (1968, 1971, 1972). Stacks, I, II, III. — *Quart. J. Math.* **19**, p. 313—320; **22**, p. 107—116; **23**, p. 153—158.
- 33\*. Erdős P., Guy R. K., Moon J.-W. (1975). On refining partitions. — *J. of the London Math. Soc.*, **9**, № 4, p. 565—570.
- 34\*. Баранов В. И. (1978). Комбинаторная модель явления фрагментации памяти. — *Программирование*, № 3, с. 46—54.
- 35\*. Баранов В. И. (1981). Одна экстремальная задача о разбиениях. — *Мат. заметки* **29**, № 2, с. 303—307.
- 36\*. Hanlon P. (1980). The incidence algebra of a group reduced partially ordered set. — *Lect. Notes Math.*, № 829, p. 148—156.
- 37\*. Стечкин Б. С. (1977). Бинарные функции на упорядоченных множествах. — *Труды МИАН* **143**, с. 178—187.
- 38\*. Стечкин Б. С. (1982). Экстремальные свойства разбиений чисел. — *ДАН СССР*, **264**, № 4, с. 833—836.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАЗБИЕНИЙ

### 14.1. Введение

В большинстве прикладных, да и во многих теоретических аспектах теории разбиений, мы интересовались конструктивным перечислением или хотя бы по возможности более полным выписыванием разбиений из интересующего нас класса. Для малых  $n$  такие перечисления осуществимы элементарными алгоритмами; они обсуждаются в следующем параграфе.

Четность величины  $p(n)$  вызывает давний интерес; поэтому наряду с другими алгоритмами, выводимыми из производящих функций, в § 14.3 представлен и наиболее эффективный известный алгоритм на сравнимость по модулю 2.

Вычисления для высокоразмерных разбиений рассматриваются в § 14.4; сюда же включен результат Кнута. В §§ 14.5—14.7 представлены таблицы значений важнейших функций разбиений. В § 14.8 приводится библиография для полных таблиц.

### 14.2. Элементарные алгоритмы

Простейший способ перечисления всех разбиений состоит в их выписывании в лексикографическом порядке. При таком упорядочении для перехода от разбиения  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$  к следующему разбиению будем придерживаться двух правил:

если  $\lambda_s > 1$ , то следующее разбиение есть

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{s-1}, \lambda_s - 1, 1); \quad (14.2.1)$$

если  $\lambda_{s-r} = c > 1$ ,  $\lambda_{s-r+1} = \lambda_{s-r+2} = \dots = \lambda_s = 1$ , то следующее разбиение получается заменой частей  $\lambda_{s-r}, \lambda_{s-r+1}, \dots, \lambda_s$  на части  $(c-1), (c-1), \dots, (c-1), d$ , где  $0 < d \leq c-1$ , а число  $\alpha$ -вхождений части  $c-1$  выбирается так, что

$$\alpha(c-1) + d = c + r = \lambda_{s-r} + \lambda_{s-r+1} + \dots + \lambda_s. \quad (14.2.2)$$

Следующая программа на фортране IV использует этот алгоритм для вычисления всех разбиений каждого целого, не превосходящего 20.

```
DIMENSION IP (20)
DO 80 N=1,20
WRITE (6,5) N
```

```

5  FORMAT (110)
   IP (1) = N
   DO 10 L=2,20
10  IP (L) = 0
15  CONTINUE
   WRITE (6, 20) IP (1), IP (2), ... IP (20)
C  COMMENT IP (J)  есть J-я часть разбиения, вычисляемого N.
20  FORMAT (2013)
   J=1
25  CONTINUE
   IF (IP (J)—1) 35, 35, 30
30  J=J+1
   GO TO 25
35  CONTINUE
   IF (J—1) 75, 75, 40
40  M=J — 2
   K=N
   IF (M) 45, 55, 45
45  DO 50 L=1, M
50  K=K — IP (L)
55  IQ=IP (J—1)
   JQ=K/(IP (J—1) — 1)
60  DO 65 LQ=1,JQ
65  IP (J—2+LQ)=IQ—1
   IP (J—1+JQ)=K—JQ * (IQ—1)
   MQ=J+JQ
   DO 70 NQ=MQ, N
70  IP (NQ)=0
   GOTO 15
75  CONTINUE
80  CONTINUE
   STOP
   END

```

Выдача этой программы начинается с

```

1
1  0  0  . . .  0
2
2  0  0  . . .  0
1  1  0  . . .  0
3
3  0  0  . . .  0
2  1  0  . . .  0
1  1  1  . . .  0

```

Довольно просто посредством подпрограмм проверять, удовлетворяет ли разбиение  $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = (IP(1), IP(2), \dots, IP(S))$  различным, наперед заданным условиям.

Имеется алгоритм, принадлежащий Гинденбургу, ограничивающийся разбиениями  $n$  ровно с  $m$  частями. Сменим наш лексикографический порядок на обратный: части разбиения записываем в возрастающем порядке и считаем, что разбиение  $(\Lambda_1 \dots \Lambda_m)$

предшествует разбиению  $(\Lambda'_1 \dots \Lambda'_m)$ , если для некоторого  $j$   $\Lambda_1 = \Lambda'_1$ ,  $\Lambda_2 = \Lambda'_2$ , ...,  $\Lambda_{j-1} = \Lambda'_{j-1}$ ,  $\Lambda_j < \Lambda'_j$ .

Алгоритм начинается с минимального элемента такого упорядочения:  $(1, 1, \dots, 1, n - m + 1)$ , а переход от разбиения  $(\Lambda_1 \dots \Lambda_m)$  к следующему разбиению осуществляется по правилам: найти то наибольшее  $j$ , при котором

$$\Lambda_m - \Lambda_j \geq 2; \quad (14.2.3)$$

заменить части  $\Lambda_j, \Lambda_{j+1}, \dots, \Lambda_m$  на  $(\Lambda_j + 1, \Lambda_j + 1, \dots, \Lambda_j + 1, \Lambda'_m)$ , где  $\Lambda'_m$  выбирается так, чтобы результирующее разбиение оставалось разбиением числа  $n$ .

Например, когда  $m = 5$ ,  $n = 12$ , имеем

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{array} \quad (14.2.4)$$

И вновь это даст легко программируемый алгоритм.

### 14.3. Алгоритмы из производящих функций

Помимо чисто теоретической пользы, исследования производящих функций и тождеств с разбиениями приносят и пользу практическую: посредством алгоритмов, выводимых из этих теоретических рассуждений, удастся подчас сильно сократить время вычисления некоторых функций разбиений.

Например, следствие 1.8:  $p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - \dots = 0$  обеспечивает счет значений  $p(n)$  для  $n \leq N$  за  $\frac{2}{3} (6n^3)^{1/2}$  операций, что вполне эффективно сравнительно с алгоритмом из задачи 2 гл. 6, где  $r(n)$  в  $\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{-a_n} = \sum_{n \geq 0} r(n) q^n$  может быть вычислено из рекуррентности

$$nr(n) = \sum_{h, j \geq 1, h \cdot j \leq n} r(n - hj)ja_j$$

за  $n^2 \log n$  операций.

Точные формулы, такие как в гл. 5, тоже оказываются полезными при вычислении.

В этой связи полезны и тождества из гл. 7—9. Например, в теореме 8.5  $A_{k,i}(n)$  может быть вычислено за  $cn^{3/2}$  ( $c$  — константа, зависящая от  $k$ ) шагов из

$$\sum_{n \geq 0} A_{k,i}(n) q^n = \frac{1}{(q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(2k+1)n(n+1)/2 - in} (1 - q^{(2n+1)i}).$$

С другой стороны, если вычислять  $B_{k,i}(n)$  из

$$\sum_{m \geq 0} b_{k,i}(m, n) = B_{k,i}(n),$$

$$b_{k,i}(m, n) = b_{k,i-1}(m, n) + b_{k,k-i+1}(m - i + 1, n - m),$$

$$b_{k,0}(m, n) = 0,$$

$$b_{k,i}(m, n) = \begin{cases} 1, & m = n = 0, \\ 0, & m \leq 0 \text{ или } n \leq 0, \text{ но } m^2 + n^2 \neq 0, \end{cases}$$

то для этого нужно затратить  $dn^2$  шагов ( $d$  — константа, зависящая от  $k$ ).

Вообще, всякий раз, как предпринимается вычисление конкретной функции разбиений, соответствующую производящую функцию нужно внимательно проанализировать с точки зрения возможности ее использования для экономии времени счета.

Заканчиваем этот параграф следующей теоремой, принадлежащей Мак-Магону, которая дает алгоритм для выяснения четности, лучший чем следствие 1.8.

**Т е о р е м а 14.1.**

$$p(4n) \equiv p(n) + p(n-7) + p(n-9) + \dots \\ \dots + p(n - \alpha_i) + \dots \pmod{2},$$

$$p(4n+1) \equiv p(n) + p(n-5) + p(n-11) + \dots \\ \dots + p(n - \beta_i) + \dots \pmod{2},$$

$$p(4n+3) \equiv p(n) + p(n-3) + p(n-13) + \dots \\ \dots + p(n - \gamma_i) + \dots \pmod{2},$$

$$p(4n+6) \equiv p(n) + p(n-1) + p(n-15) + \dots \\ \dots + p(n - \delta_i) + \dots \pmod{2},$$

где ряды в правых частях сравнений продолжаютс я до тех пор, пока аргументы не станут отрицательными, и  $\alpha_i = i (8i \mp 1)$ ,  $\beta_i = i (8i \mp 3)$ ,  $\gamma_i = i (8i \mp 5)$ ,  $\delta_i = i (8i \mp 7)$ .



Д о к а з а т е л ь с т в о .

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 0} p(n) q^n &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} \equiv \\
 &\equiv \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)^{-1} (\bmod 2) \stackrel{(1.2.5)}{=} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}) \equiv \\
 &\equiv \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{4n-1}) (1 + q^{4n-3}) (\bmod 2) = \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n})^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n}) (1 + q^{4n-1}) (1 - q^{4n-3}) = \\
 &\stackrel{(2.8)}{=} \left( \sum_{n \geq 0} p(n) q^{4n} \right) \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2}.
 \end{aligned}$$

Результат теоремы 14.1 теперь легко получается приравниванием коэффициентов при  $q^{4n}$ ,  $q^{4n+1}$ ,  $q^{4n+3}$ ,  $q^{4n+6}$  в этих сравнениях.

#### 14.4. Вычисления для многомерных разбиений

До тех пор пока мы исследовали задачи, в которых соответствующая производящая функция принимала какую-то хорошо известную форму, например бесконечное произведение, можно было действовать, как указано в § 14.3. К сожалению, эта счастливая возможность покидает нас при рассмотрении разбиений размерности  $d$ ,  $d > 2$ , как в гл. 11. Таким образом, вычисление даже трехмерных разбиений становится громоздкой задачей. Единственным полезным известным инструментом здесь оказывается техника Мак-Магона, тесно связанная с нашим доказательством теоремы 3.7. Эта техника Мак-Магона была приспособлена Кнудом к вполне общей ситуации, и мы приводим здесь его обобщение.

Рассматривается множество  $P$ , частично упорядоченное посредством  $\leq$ , и порядок-обращающее отображение  $\omega$  из  $P$  в множество неотрицательных целых, т. е. если  $x \leq y \in P$ , то  $\omega(x) \geq \omega(y)$ .

**О п р е д е л е н и е 14.1.** Порядок-обращающее отображение  $\omega$ , будем называть *помечающим* (пометкой), если лишь для конечного числа элементов  $x$  выполняется неравенство  $\omega(x) > 0$ .

Следующая лемма обособливает элементы множества  $P$  с положительными метками; это сразу сводит рассмотрение всего (вообще говоря бесконечного)  $P$  к конечному подмножеству множества  $P$ .

**Л е м м а 14.2.** Пусть частичный порядок  $\leq$  расширен до линейного порядка  $\leq$  в  $P$ . Существует взаимно однозначное соответствие между пометками  $P$  и парами последовательностей;

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \text{ (положительные целые),} \quad (4.4.1)$$

$x_1, x_2, \dots, x_m$  (элементы  $P$ ),

удовлетворяющее условиям: (1)  $x \in P$  и  $x \leq x_j \Rightarrow x = x_i$  для некоторого  $i < j$ ; (2)  $x_i > x_{i+1} \Rightarrow n_i > n_{i+1}$  для  $1 \leq i < m$ .

Доказательство. Это соответствие становится очевидным по предъявлении следующей подходящей конструкции: выпишем все  $x$  с наибольшей меткой в возрастающем порядке по  $\leq$ , выпишем затем  $x$  со следующей наибольшей меткой опять-таки в возрастающем по  $\leq$  порядке и так далее. По исчерпывании всех положительных пометок выпишем пометку каждого  $x$  прямо над  $x$ . Проверка показывает, что эта процедура порождает убывающую последовательность меток и является однозначно обратимой.

Определение 14.2. Будем говорить, что пометка  $\omega$  множества  $P$  является  $(P, \omega)$ -разбиением числа  $n$ , если  $\sum_{x \in P} \omega(x) = n$ .

Согласно лемме 14.2 каждое  $(P, \omega)$ -разбиение соответствует паре последовательностей:

$$\begin{aligned} n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots & \quad (\text{бесконечная последовательность} \\ & \quad \text{неотрицательных целых}), \\ x_1, x_2, \dots, x_m & \quad (\text{различные элементы } P), \end{aligned} \quad (14.4.2)$$

где  $m \geq 0$ ; (1)  $x \in P$  и  $x \leq x_j \Rightarrow x = x_i$  для некоторого  $i < j$ ; (2)  $x_i > x_{i+1} \Rightarrow n_i > n_{i+1}$  для  $1 \leq i < m$ ; (3) если  $m > 0$ , то  $n_m > n_{m+1}$ ; (4) если  $m > 0$ , то существует  $x \in P$  такой, что  $x < x_m$  и  $x \neq x_i$  для  $1 \leq i \leq m$ . Конечная последовательность  $\{x_i\}$ , удовлетворяющая (1) и (4), называется *топологической последовательностью*. Чтобы увидеть это соответствие, достаточно просто приписать нули к последовательности  $n_i$  и отбросить  $x_m$ , если таковой оказывается минимальным элементом множества  $P - \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$ .

Например, пусть  $P$  — множество точек плоскости с неотрицательными координатами и частичным упорядочением  $(i, j) \leq (i', j')$ , если  $i \leq i'$  и  $j \leq j'$ . Этот частичный порядок можно продолжить до линейного лексикографического порядка:  $(i, j) \leq (i', j')$ , если  $i < i'$  или  $i = i'$  и  $j \leq j'$ . В этом случае  $(P, \omega)$ -разбиения в точности соответствуют плоским разбиениям (записанным в перевернутом виде). Таким образом, плоское разбиение

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \\ & & & & & & 4 & 3 & 1 \\ & & & & & & 5 & 3 & 3 & 2 \end{array}$$

соответствует  $(P, \omega)$ -разбиению

$$\begin{array}{cccccccccccc} 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ (0, 0) & (0, 1) & (1, 0) & (1, 1) & (2, 0) & (1, 2) & (3, 0) & (2, 1) & (0, 2) & (0, 3) \end{array}$$

Соответствующая последовательность (14.4.2) имеет вид

$$\begin{array}{cccccccccccc} 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \dots \\ (0, 0) & (0, 1) & (1, 0) & (1, 1) & (2, 0) & (1, 2) & (3, 0) & (2, 1) & & & & \end{array}$$

Ясно, что имеется взаимно однозначное соответствие между последовательностями (14.4.1) и последовательностями (14.4.2).

**О п р е д е л е н и е 14.5.** *Индексом* топологической последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_m$  называется сумма всех тех  $j$ , для которых  $x_j > x_{j+1}$  при соглашении, что  $x_m > x_{m+1}$ .

Таким образом, возвращаясь к нашему примеру, видим, что топологическая последовательность

$$(0, 0) \ (0, 1) \ (1, 0) \ (1, 1) \ (2, 0) \ (1, 2) \ (3, 0) \ (2, 1)$$

имеет индекс  $5 + 7 + 8 = 20$ .

Для данной топологической последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_m$  каждой последовательности  $n_1 \geq n_2 \geq \dots$  из неотрицательных целых, удовлетворяющей условиям (2) и (3), выписанным после (14.4.2), соответствует единственная бесконечная последовательность  $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \dots$ , получаемая вычитанием 1 из каждого  $n_1, \dots, n_j$  для каждого  $j$  такого, что  $x_j > x_{j+1}$  или  $j = m$ . Возвращаясь к нашему примеру, видим, что последовательность  $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \dots$  в этом случае имеет вид 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ... Замечательный факт состоит в том, что сумма этих  $p_i + 1$  индексов равна сумме  $n_i$  и это есть единственное соотношение между этими тремя последовательностями. Эти рассуждения приводят к следующему результату.

**Т е о р е м а 14.3.** *Пусть  $P$  — бесконечное частично упорядоченное множество. Тогда имеется взаимно однозначное соответствие между  $(P, \omega)$ -разбиениями  $n$  и упорядоченными парами  $(\{x_i\}, \{p_i\})$ , где  $\{x_i\}$  — это топологическая последовательность, а  $\{p_i\}$  — разбиение числа  $n - k$ , где  $k$  — индекс последовательности  $\{x_i\}$ .*

**С л е д с т в и е 14.4.** *Пусть  $P$  — бесконечное частично упорядоченное множество, пусть  $s(n)$  — число  $(P, \omega)$ -разбиений числа  $n$ , и пусть  $t(k)$  — число топологических последовательностей множества  $P$ , имеющих индекс  $k$ . Тогда*

$$\sum_{n \geq 0} s(n) q^n = \left( \sum_{n \geq 0} t(n) q^n \right) \left( \sum_{n \geq 0} p(n) q^n \right) = (q)^{-1} \sum_{n \geq 0} t(n) q^n.$$

Вообще, топологические последовательности находить легче, чем произвольные разбиения. Например, можно строить топологи-

ческие последовательности точек в первом квадранте следующим образом: во-первых, выбираем множество, скажем, из  $m$  точек, которое соответствует графическому представлению некоторого разбиения. Тогда эти точки надо перенумеровать, используя первые  $m$  целых так, что числа эти строго возрастают по строкам и столбцам, стараясь при этом не помещать  $m$  в первый столбец. Если, скажем, выбраны точки

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}$$

то соответствующие топологические последовательности

$$\begin{array}{ccccc} 3 & & & & 2 \\ 1 & 2 & 4 & \text{и} & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

означают, что  $x_1 = (0, 0)$ ,  $x_2 = (1, 0)$ ,  $x_3 = (0, 1)$ ,  $x_4 = (2, 0)$  и  $x_1 = (0, 0)$ ,  $x_2 = (0, 1)$ ,  $x_3 = (1, 0)$ ,  $x_4 = (2, 0)$  соответственно. В этом примере топологическая последовательность есть по существу стандартная диаграмма Юнга (для получения стандартной диаграммы Юнга нужно обратить последовательность с тем специальным условием, что  $m$  не может находиться в первом столбце.

### 14.5. Краткие таблицы функций разбиений

В табл. 14.1 представлены значения  $p(n)$  — числа разбиений  $n$ ;  $p(\mathcal{O}, n) (= p(\mathcal{D}, n))$  — числа разбиений  $n$  с нечетными частями;  $A_{2,2}(n) (= B_{2,2}(n))$  — числа разбиений  $n$  на части, сравнимые с 1 или 4 по модулю 5;  $A_{2,1}(n) (= B_{2,1}(n))$  — числа разбиений  $n$  на части, сравнимые с 2 или 3 по модулю 5.

### 14.6. Таблица функции плоских разбиений

Табл. 14.2 для  $M_2(n)$  — числа плоских разбиений  $n$  — легко вычисляема из простой рекуррентности (задача 2 гл. 6)

$$nM_2(n) = \sum_{j=1}^n M_2(n-j) \sigma_2(j),$$

где  $\sigma_2(j)$  есть сумма квадратов делителей  $j$ .

### 14.7. Таблица многочленов Гаусса

Поскольку эти многочлены

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{(1 - q^n) \dots (1 - q^{n-r+1})}{(1 - q^r) \dots (1 - q)}$$

весьма важны для наших исследований, мы включим табл. 14.3 для  $n \leq 12$ . Поскольку

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n - r \end{bmatrix},$$

то  $0 \leq r \leq n/2$ . Кроме того,

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1};$$

поэтому мы рассматриваем лишь  $2 \leq r \leq n/2$ .

### 14.8. Иные таблицы

В [8] предъявлены наиболее полные таблицы разбиений для  $p(n)$  до  $n \leq 600$  и для числа разбиений  $n$  не более чем с  $t$  частями. [8] представляет собой расширенную таблицу [7]. В [2] представлены короткие таблицы разбиений и биразбиений. В [14] приведен ряд последовательностей разбиений. В работах [1, 4, 5, 3] описывается применение вычислительных машин при решении задач о разбиениях.

Таблицы значений биномиальных и мультиномиальных коэффициентов, чисел Стирлинга первого и второго рода, значений для  $p(n)$  и для числа разбиений  $n$  с неравными частями до  $n = 500$  представлены в [16].

### З а м е ч а н и я

Алгоритм Гинденбурга в § 14.2 взят из [6, т. 2, с. 106]; в гл. 3 этой книги в деталях представлен начальный период теории разбиений. Историю разбиений от 1940 до 1972 г. можно найти в [10, гл. Р, т. 4], тогда как в [10, разд. 30, т. 6] представлены координаты различных таблиц по разбиениям.

Теорема 14.1 взята из [11]; этот результат Мак-Магона был сильно расширен в [13]. Материал § 14.4 взят из [9]; Кнут имеет вычислительную программу для нахождения топологических последовательностей, связанных с разбиениями. Понятие  $(P, \omega)$ -разбиений интенсивно изучалось Стенли (1972), который показал, что ряд задач о разбиениях и перестановках может быть продвинут использованием этого сильного метода.

В [12] представлен ряд алгоритмов для вычисления композиций и разбиений; гл. 5 и 6 из [12] относятся к композициям, а гл. 9 и 12 — к разбиениям.

Т а б л и ц а 14.1

$n$	$p(n)$	$p(\mathcal{O}, n)$	$A_{2,2}(n)$	$A_{2,1}(n)$	$n$	$p(n)$	$p(\mathcal{O}, n)$	$A_{2,2}(n)$	$A_{2,1}(n)$
1	1	1	1	0	51	239943	4097	1174	739
2	2	1	1	1	52	281589	4582	1299	820
3	3	2	1	1	53	329931	5120	1429	899
4	5	2	2	1	54	386155	5718	1579	997
5	7	3	2	1	55	451276	6378	1735	1091
6	11	4	3	2	56	526823	7108	1913	1207
7	15	5	3	2	57	614154	7917	2100	1321
8	22	6	4	3	58	715220	8808	2311	1457
9	30	8	5	3	59	831820	9792	2533	1593
10	42	10	6	4	60	966467	10880	2785	1756
11	56	12	7	4	61	1121505	12076	3049	1916
12	77	15	9	6	62	1300156	13394	3345	2108
13	101	18	10	6	63	1505499	14848	3659	2301
14	135	22	12	8	64	1741630	16444	4010	2525
15	176	27	14	9	65	2012558	18200	4380	2753
16	231	32	17	11	66	2323520	20132	4794	3019
17	297	38	19	12	67	2679689	22250	5231	3287
18	385	46	23	15	68	3087735	24576	5717	3599
19	490	54	26	16	69	3554345	27130	6233	3917
20	627	64	31	20	70	4087968	29927	6804	4281
21	792	76	35	22	71	4697205	32992	7409	4655
22	1002	89	41	26	72	5392783	36352	8080	5084
23	1255	104	46	29	73	6185689	40026	8790	5521
24	1575	122	54	35	74	7089500	44046	9573	6021
25	1958	142	61	38	75	8118264	48446	10406	6537
26	2436	165	70	45	76	9289091	53250	11322	7118
27	3010	192	79	50	77	10619863	58499	12294	7721
28	3718	222	91	58	78	12132164	64234	13363	8401
29	4565	256	102	64	79	13848650	70488	14498	9103
30	5604	296	117	75	80	15796476	77312	15742	9894
31	6842	340	131	82	81	18004327	84756	17066	10715
32	8349	390	149	95	82	20506255	92864	18512	11631
33	10143	448	167	105	83	23338469	101698	20050	12587
34	12310	512	189	120	84	26543660	111322	21732	13653
35	14883	585	211	133	85	30167357	121792	23519	14761
36	17977	668	239	152	86	34262962	133184	25466	15995
37	21637	760	266	167	87	38887673	145578	27540	17285
38	26015	864	299	190	88	44108109	159046	29796	18710
39	31185	982	333	210	89	49995925	173682	32196	20203
40	37338	1113	374	237	90	56634173	189586	34806	21854
41	44583	1260	415	261	91	64112359	206848	37582	23579
42	53174	1426	465	295	92	72533807	225585	40594	25483
43	63261	1610	515	324	93	82010177	245920	43802	27480
44	75175	1816	575	364	94	92669720	267968	47276	29671
45	89134	2048	637	401	95	104651419	291874	50974	31975
46	105558	2304	709	448	96	118114304	317788	54979	34502
47	124754	2590	783	493	97	133230930	345856	59239	37153
48	147273	2910	871	551	98	150198136	376256	63843	40058
49	173525	3264	961	604	99	169229875	409174	68747	43114
50	204226	3658	1065	673	100	190569292	444793	74040	46447

Т а б л и ц а 14.2

$n$	$M_2(n)$	$n$	$M_2(n)$	$n$	$M_2(n)$
1	1	41	409383981	81	23498 9042219523
2	3	42	593001267	82	31738 2398602028
3	6	43	856667495	83	42817 1324714100
4	13	44	1234363833	84	57697 8362008262
5	24	45	1774079109	85	77663 3557947931
6	48	46	2543535902	86	104422 6582040722
7	86	47	3537993036	87	140249 8445554353
8	160	48	5191304973	88	188168 0993051045
9	282	49	7391026522	89	252192 5777635221
10	500	50	1 0499640707	90	337650 8618954817
11	859	51	1 4883573114	91	451605 3506209319
12	1479	52	2 1053676445	92	603409 5681424573
13	2485	53	2 9727561230	93	805440 1761691018
14	4167	54	4 1871334614	94	1074059 4259633282
15	6879	55	5 8874385349	95	1430879 4779412286
16	11297	56	8 2623976486	96	1904421 9737399823
17	18334	57	11 5737404664	97	2532294 5742868655
18	29601	58	16 1825846160	98	3364043 3065994170
19	47330	59	22 5863047430	99	4464887 4867815365
20	75278	60	31 4689799781	100	5920606 6030052023
21	118794	61	43 7699333376		
22	186475	62	60 7771804065		
23	290783	63	84 2541287719		
24	451194	64	116 6117605448		
25	696033	65	161 1415838202		
26	1068745	66	222 3312543970		
27	1632658	67	306 2906627106		
28	2483234	68	421 3276093961		
29	3759612	69	578 7232662336		
30	5668963	70	793 7771067795		
31	8512309	71	1087 2114256046		
32	12733429	72	1487 0591703377		
33	18974973	73	2031 1959869076		
34	28175955	74	2770 7354427729		
35	41691046	75	3774 5732428153		
36	61484961	76	5135 4666391773		
37	90379784	77	6978 1543686979		
38	132441995	78	9470 1959299374		
39	193487501	79	12836 4196860773		
40	281846923	80	17378 1688194937		

Т а б л и ц а 14.3

$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$	1	$q$	$q^2$	$q^3$	$q^4$	$q^5$	$q^6$	$q^7$	$q^8$	$q^9$	$q^{10}$	$q^{11}$	$q^{12}$	$q^{13}$	$q^{14}$	$q^{15}$	$q^{16}$	$q^{17}$	$q^{18}$
$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	1	1														
$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	2	2	1	1												
$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	2	3	2	2	1	1										
$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	3	3	3	2	1	1									
$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	2	3	3	3	2	2	1	1								
$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	4	4	5	4	4	3	2	1	1						
$\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	2	3	3	4	3	3	2	2	1	1						
$\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	4	5	6	6	6	6	5	4	3	2	1	1			
$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	5	5	7	7	8	7	7	5	5	3	2	1	1		
$\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	2	3	3	4	4	4	3	3	2	2	1	1				
$\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	4	5	7	7	8	8	8	7	7	5	4	3	2	1	1
$\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	5	6	8	9	11	11	12	11	11	9	8	6	5	3	2
$\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	4	4	3	3	2	2	1	1		
$\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	4	5	7	8	9	10	10	10	10	9	8	7	5	4	3
$\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	5	6	9	10	13	14	16	16	18	16	16	14	13	10	9
$\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	5	7	9	11	14	16	18	19	20	20	19	18	16	14	11
$\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	5	4	4	3	3	2	2	1	1
$\begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	4	5	7	8	10	11	12	12	13	12	12	11	10	8	7
$\begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	5	6	9	11	14	16	19	20	23	23	24	23	23	20	19



Т а б л и ц а 14.3 (продолжение)

$\left[ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right]$	1	q	q <sup>2</sup>	q <sup>3</sup>	q <sup>4</sup>	q <sup>5</sup>	q <sup>6</sup>	q <sup>7</sup>	q <sup>8</sup>	q <sup>9</sup>	q <sup>10</sup>	q <sup>11</sup>	q <sup>12</sup>	q <sup>13</sup>	q <sup>14</sup>	q <sup>15</sup>	q <sup>16</sup>	q <sup>17</sup>	q <sup>18</sup>
$\left[ \begin{smallmatrix} 11 \\ 5 \end{smallmatrix} \right]$	1	1	2	3	5	7	10	12	16	19	23	25	29	30	32	32	32	30	29
$\left[ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	5	5	4	4	3	3	2	2
$\left[ \begin{smallmatrix} 12 \\ 3 \end{smallmatrix} \right]$	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	13	14	15	15	15	15	14	13	12
$\left[ \begin{smallmatrix} 12 \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$	1	1	2	3	5	6	9	11	15	17	21	23	27	28	31	31	31	31	31
$\left[ \begin{smallmatrix} 12 \\ 5 \end{smallmatrix} \right]$	1	1	2	3	5	7	10	13	17	21	26	30	35	39	43	46	48	49	49
$\left[ \begin{smallmatrix} 12 \\ 6 \end{smallmatrix} \right]$	1	1	2	3	5	7	11	13	18	22	28	32	39	42	48	51	55	55	58

## ЛИТЕРАТУРА

1. Andrews G. E. (1971). The use of computers in search of identities of the Rogers—Ramanujan type. — In.: Computers in Number Theory (A. O. L. Atkin and B. J. Birch, eds.), Academic Press, New York.
2. Barton D. E., David F. N., Kendall M. G. (1966). Symmetric Functions and Allied Tables. — Cambridge Univ. Press, London and New York.
3. Burnell D., Houten L. (1971). Multiplanar partitions. — In.: Computers in Number Theory (A. O. L. Atkin and B. J. Birch, eds.), Academic Press, New York.
4. Cheema M. S. (1971). Computers in the theory of partitions. — In.: Computers in Number Theory (A. O. L. Atkin and B. J. Birch, eds.), Academic Press, New York.
5. Churchhouse R. F. (1971). Binary partitions. — In.: Computers in Number Theory (A. O. L. Atkin and B. J. Birch, eds.), Academic Press, New York.
6. Dickson L. E. (1920). History of the Theory of Numbers, Vol. 2. — Carnegie Institution of Washington, Washington D. C. (reprinted by Chelsea, New York, 1952, 1966).
7. Gupta H. (1939). Tables of Partitions. — Indian Math. Soc., Madras.
8. Gupta H., Gwyther A. E., Miller J. C. P. (1958). Tables of Partitions (Roy. Soc. Math. Tables, Vol. 4).
9. Knuth D. E. (1970). A note on partitions. — Math. Comp. **24**, p. 955—961.
10. LeVeque W. J. (1974). Reviews in Number Theory, Vols 4 and 6. — Amer. Math. Soc., Providence, R. I.
11. MacMahon P. A. (1921). Note on the parity of the number which enumerates the partitions of a number. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **20**, p. 281—283.
12. Nijenhuis A., Wilf H. S. (1975). Combinatorial Algorithms. — Academic Press, New York.
13. Parkin T. R., Shanks D. (1967). On the distribution of parity in the partition function. — Math. Comput. **21**, p. 466—480.
14. Sloane N. J. A. (1973). A Handbook of Integer Sequences. — Academic Press, New York.
15. Stanley R. P. (1972). Ordered structures and partitions. — Mem. Amer. Math. Soc. **119**.
- 16\*. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.

## ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАЗБИЕНИЙ

Б. С. СТЕЧКИН

**Введение.** Традиционные экстремальные задачи аддитивного представления чисел, например: сколь малым числом предписанных слагаемых аддитивно представимо каждое натуральное из заданного множества? Однако эти экстремальные постановки не содержат в себе разбиений в явном виде. Вместе с тем имеется широкий круг экстремальных задач, связанных с собственно разбиениями, разрешение которых несет информацию не только о самих разбиениях, но и об аддитивных представлениях. Эти задачи открывают новые области применения теории разбиений.

**Вложимость разбиений.** На множестве разбиений вводится отношение частичного порядка. Пусть  $P$  — множество всех разбиений всех натуральных чисел,  $P(n)$  — множество всех разбиений  $n$ ,  $P_r(n)$  — множество всех разбиений  $n$  на  $r$  частей.

**О п р е д е л е н и е 1.** Разбиение  $(k_1, \dots, k_r) \vdash k$  вложимо в разбиение  $(n_1 \dots n_r) \vdash n((k_1 \dots k_r) \subset (n_1 \dots n_r))$ , если части  $k_i$  разбиения  $(k_1 \dots k_r)$  можно так сгруппировать в  $r$  групп (каждая часть  $k_i$  входит ровно в одну группу), что по сложении всех частей в каждой группе получится  $r$  чисел  $p_1, \dots, p_r$  таких, что  $0 \leq p_i \leq n_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ).

Если  $k = n$ , то вложимость эквивалентна тому, что сложением отдельных частей разбиения  $(k_1 \dots k_r)$  можно получить разбиение  $(n_1 \dots n_r)$ . Вложимость является отношением частичного порядка на разбиениях, и всюду далее множества  $P$  и  $P(n)$  понимаются как частично упорядоченные по вложимости.

Если  $L_n$  — множество всех белловских разбиений  $n$ -множества (см. гл. 13), то  $P(n)$  можно понимать как результат факторизации  $L_n$  по типам разбиений, т. е. по объемам блоков разбиения множества с естественным наследованием порядка. Однако если  $L_n$  — решетка, то  $P(n)$  таковой уже не является; единицей  $P(n)$  служит одночастное разбиение  $(n)$ , а нулем —  $(1^n)$ . Подробнее о связях  $L_n$  и  $P_n$  см. [1, 2]. Один из основных открытых структурных вопросов, связанных с  $P_n$ , — поиск замкнутого представления для мёбиус-функции  $P(n)$ .

Известны некоторые численные характеристики  $P(n)$ : формулу для  $|P(n)|$  см. в гл. 5, формулу для  $|P_r(n)|$  см. в гл. 4. Пример оценки иной характеристики дает

**Т е о р е м а 1** ([3]). Пусть  $f(n)$  — число максимальных цепей (длины  $n - 1$ ) от нуля до единицы множества  $P(n)$ . Тогда существуют такие константы  $c_1$  и  $c_2$ , что

$$c_1^n n^{n/2} < f(n) < c_2^n n^{n/2},$$

причем  $0,31555 < c_1$ ,  $c_2 < 11,31371$ .

Интересный открытый вопрос в этом направлении представляет собой задача вычисления идеалов  $P(n)$ : для  $p \in P(n)$  пусть

$$J^+(p) = \{q \in P(n) : q \supset p\}, \quad J^-(p) = \{q \in P(n) : q \subset p\};$$

вычислить  $|J^+(p)|$  и  $|J^-(p)|$ .

**Принцип полного размещения.** Отдельное направление составляет вычисление экстремальных характеристик вложимости. Так, например, в терминах вложимости легко формулируется широко известный

**П р и н ц и п Д и р и х л е.** Пусть для натуральных  $k$  и  $r$  через  $n(k, r)$  обозначено наименьшее  $n$ , при котором  $\forall p \in P_r(n)$ :  $p \supset (k)$ . Тогда  $n(k, r) = rk - r + 1$ .

По аналогии с принципом Дирихле естественно поинтересоваться вложимостью не отдельного числа в каждое разбиение  $p \in P_r(n)$ , а вложимостью фиксированного разбиения  $(k_1 \dots k_t) \vdash k$  в каждое разбиение  $p \in P_r(n)$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Для разбиения  $(k_1 \dots k_t) \vdash k$  и натурального  $r$  через  $n(k_1 \dots k_t; r)$  обозначаем то наименьшее  $n$ , при котором  $\forall p \in P_r(n)$ :  $p \supset (k_1 \dots k_t)$ .

**Т е о р е м а 2** (принцип полного размещения) [4]. Пусть  $k_1 \geq \dots \geq k_t$ ,  $r$  — натуральные числа. Тогда

$$n(k_1 \dots k_t; r) = \max_{1 \leq i \leq t} \left\{ \sum_{j=1}^i k_j + (r-1)(k_i - 1) \right\}. \quad (1)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Правую часть (1) обозначим через  $f(k_1 \dots k_t; r)$ . Ясно, что  $n(k_1 \dots k_t; r) \geq f(k_1 \dots k_t; r)$ , поскольку вложимость  $(k_1 \dots k_t) \subset (n - (r-1)(k_t - 1), (k_t - 1)^{r-1})$  влечет неравенство  $n - (r-1)(k_t - 1) \geq k_1 + \dots + k_t$ . Кроме того, если  $t > 1$ , то

$$f(k_1 \dots k_t; r) \geq k_1 + f(k_2 \dots k_t; r), \quad (2)$$

поскольку, если  $i$  — индекс, максимизирующий  $f(k_2 \dots k_t; r)$ , то

$$\begin{aligned} f(k_1 \dots k_t; r) &\geq \sum_{j=1}^i k_j + (r-1)(k_i - 1) = \\ &= k_1 + \sum_{j=2}^i k_j + (r-1)(k_i - 1) = k_1 + f(k_2 \dots k_t; r). \end{aligned}$$

Равенство (1) докажем индукцией по  $t$ . При  $t = 1$  (1) есть просто принцип Дирихле. Для индукционного перехода от  $t - 1$

к  $t$  достаточно показать, что если  $n = f(k_1 \dots k_t; r)$ , то требуемая вложимость выполняется. Рассмотрим произвольное разбиение  $(n_1 \dots n_r) \vdash n$ ; в нем всегда  $n_1 \geq k_1$ , так как  $f(k_1 \dots k_t; r) \geq k_1 + (r-1)(k_1 - 1)$ ; поэтому вложимость

$$(k_2 \dots k_t) \subset (n_1 - k_1 \ n_2 \dots n_r) \quad (3)$$

влечет вложимость  $(k_1 \dots k_t) \subset (n_1 \dots n_r)$ . В свою очередь (3) следует из (2) и индукционного предположения:

$$n_1 - k_1 + n_2 + \dots + n_r = n - k_1 = f(k_1 \dots k_t; r) - k_1 \geq f(k_2 \dots k_t; r).$$

Если при этом  $n_1 = k_1$ , то надлежит еще воспользоваться очевидной монотонностью  $f$  по  $r$ .

**Следствия и применения.** Большинство непосредственных следствий принципа полного размещения вынесено в раздел «Задачи»; здесь мы приводим лишь некоторые, призванные продемонстрировать широту приложений этого логического принципа размещения.

**Задача плотнейшего заполнения рюкзака** объема  $n$  предметами объемов  $k_1 \geq \dots \geq k_t$  состоит в вычислении величины

$$m(k_1 \dots k_t; n) = \max_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq t} \sum_{j=1}^s k_{i_j}.$$

$$\sum_{j=1}^s k_{i_j} \leq n$$

**Утверждение 1.** Если  $n < \sum_{i=1}^t k_i$ , то

$$m(k_1 \dots k_t; n) \geq n + 1 - \max_{1 \leq i \leq t} \left\{ k_i - \sum_{j=i+1}^t k_j \right\}.$$

Для доказательства введем  $n(k_1 \dots k_t; r; n^*)$  — наименьшее  $n$ , при котором разбиение  $(k_1 \dots k_t)$  вложимо в каждое  $r$ -частное разбиение  $n$ , обладающее частью  $n^*$ . Ясно, что

$$n^* + r - 1 \leq n(k_1 \dots k_t; r; n^*) \leq \max \{ n^* + r - 1, f(k_1 \dots k_t; r) \}. \quad (4)$$

Из монотонности  $n(k_1 \dots k_t; r)$  по  $(k_1 \dots k_t)$  и принципа полного размещения сразу находим, что

$$n(k_1 \dots k_t; 2; n^*) = n^* + \min_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq t} f(k_1 \dots \bar{k}_{i_1} \dots \bar{k}_{i_s} \dots k_t; r)$$

$$\sum_{j=1}^s k_{i_j} \leq n^*$$

(крышечка над элементом последовательности обозначает отсутствие этого элемента в этой последовательности). Стало быть,

если  $n^* < \sum_{i=1}^t k_i = k$ , то, согласно определению  $f$ ,

$$\begin{aligned} n(k_1 \dots k_t; 2; n^*) &= \\ &= n^* + \min_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq t \\ \sum_{j=1}^s k_{i_j} \leq n^*}} \left( k - \sum_{j=1}^s k_{i_j} \right) = n^* + k - \max_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq t \\ \sum_{j=1}^s k_{i_j} \leq n^*}} \sum_{j=1}^s k_{i_j} = \\ &= n^* + k - m(k_1 \dots k_t; n^*), \end{aligned}$$

что с учетом (1) и (4) дает требуемое:

$$\begin{aligned} m(k_1 \dots k_t; n^*) &= n^* + k - n(k_1 \dots k_t; 2; n^*) \geq \\ &\geq n^* + k - n(k_1 \dots k_t; 2) = \\ &= n^* + k - \max_{1 \leq i \leq t} \left\{ \sum_{j=1}^i k_j + k_i - 1 \right\} = n^* + 1 - \max_{1 \leq i \leq t} \left\{ k_i - \sum_{j=i+1}^t k_j \right\}. \end{aligned}$$

В качестве иллюстрации отметим один простой факт об аддитивных представлениях: если неубывающая последовательность натуральных чисел  $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$  такова, что  $k_i \leq 1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_j$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), то каждое натуральное число представимо в виде суммы различных элементов этой последовательности.

Явление фрагментации памяти ЭВМ требует быстрых алгоритмов размещения системы запросов информации объемов  $k_1 \dots k_t$  в систему фрагментов свободной памяти объемов  $n_1 \dots n_r$  [5, 6].

Из принципа полного размещения явствует, что если  $\sum_{i=1}^r n_i \geq \geq f(k_1 \dots k_t; r)$ , то разместить запросы можно, причем быстрыми алгоритмами «большее в большее», «большее в наименьшее возможное» или же «большее в любое подходящее».

### Задачи

1. Если  $n(k, t, r)$  — наименьшее  $n$ , при котором  $\forall q \in P_t(k), \forall p \in P_r(n): p \supset \supset q$ , то

$$n(k, t, r) = \max \{rk - rt + 1, k\}.$$

2. При любом размещении  $n$  частиц по  $r$  ячейкам найдется  $r$  различных групп частиц (по  $n/(2r)$  частиц в каждой группе), целиком лежащих в ячейках.

3. Если  $p(k_1 \dots k_t; r)$  — наименьшее  $p \in \mathbb{N}$ , при котором  $(k_1 \dots k_t) \not\subset (p^r)$ , то  $p(k_1 \dots k_t; r) = \lceil f(k_1 \dots k_t; r)/r \rceil$ .

4. Если  $m(k, t, r)$  — наибольшее  $m$ , при котором  $\forall q \in P_t(k) \exists p \in P_r(m): p \not\supset q$ , то для достаточно большого  $r$

$$m(k, t, r) = \left( \left\lceil \frac{k}{\lfloor k/t \rfloor} \right\rceil + r - 1 \right) \left\lfloor \frac{k}{t} \right\rfloor - r.$$

5. Если  $N(k, t, r)$  — наименьшее  $N$ , при котором  $\forall p \in P_r(N) \exists q \in P_t(k): p \subset q$ , то

$$N(k, t, r) = k + \left( \left\lfloor \frac{k}{t} \right\rfloor - 1 \right) \max \{0, r - t\}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Стечкин Б. С. Несколько комбинаторных проблем. — Сборн. рад. Мат. инст. Нов сер., 1977, 2 (10), с. 129—137.
2. Hanlon Ph. The incidence algebra of a group reduced partially ordered set. — LNM, 1980, № 829, p. 148—156.
3. Erdős P., Guy R. K., Moon J. W. On refining partitions. — J. London Math. Soc., 1975, 9 (2), № 4, p. 565—570.
4. Стечкин Б. С. Экстремальные свойства разбиений чисел. — ДАН СССР, 1982, 264, № 4, с. 833—836.
5. Баранов В. И. Комбинаторная модель фрагментации памяти. — Программирование, 1978, № 3, с. 46—54.
6. Баранов В. И. Одна экстремальная задача о разбиениях. — Матем. заметки, 1981, 29, № 2, с. 303—307.

# УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $\left(\frac{a}{b}\right)$  84  
 $A_d$  110  
 $(a)_\infty$  31  
 $a_i(r)$  133  
 $\mathcal{A}_{k,a}$  133  
 $\mathcal{A}_{k,a}(N)$  127  
 $A_k(n)$  38, 82  
 $A_{k,i}(n)$  119  
 $\alpha_d$  110  
 $a_\lambda$  227  
 $a_n$  227  
 $(a)_n$  31  
 $a_m(s_1, \dots, s_r)$  206  
 $a_\pi$  227  
 $A(q)$  206  
 $(a; q)_\infty$  31  
 $(a; q)_n$  31  
 $A(z, s)$  95  
 $\beta_i(m)$  212  
 $\mathcal{B}_{k,a}$  133  
 $\mathcal{B}_{k,a}(N)$  127  
 $b_{k,i}(m, n)$  119  
 $B_{k,i}(n)$  119  
 $B_k(n)$  38  
 $b(m; n)$  183  
 $b(n)$  170  
 $B_n$  220  
 $B(q)$  170  
 $\mathcal{B}(u)$  211  
 $B_0(q)$  206  
 $c_a$  178  
 $c(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  70  
 $c(\alpha_1, \dots, \alpha_r; m)$  70  
 $C_d$  110  
 $\chi(h, k)$  94  
 $\chi(\xi_i)$  56  
 $c_j(m)$  172  
 $\mathcal{C}_{k,a}$  133  
 $c_{k,i}(m, n)$  121  
 $C_{k,i}(n)$  124  
 $c_k(m, n)$  76  
 $C^{(m)}$  139  
 $C(M, N)$  151  
 $c(m, n)$  67  
 $c(N, M, n)$  68  
 $\mathcal{D}$  15, 132  
 $\Delta_d(q)$  110  
 $\delta(\pi_1, \pi_2)$  223  
 $D_j$  108  
 $\mathcal{D}_{k,a}$  133  
 $\mathcal{D}(k, i)$  37  
 $d_{k,i}(m, n)$  124  
 $D_{k,i}(n)$  124  
 $\delta_k(m)$  172  
 $D_n$  64  
 $\mathcal{D}(r; b_1, b_2, \dots, b_m; m)$  147  
 $D(s)$  100  
 $\mathcal{E}$  147  
 $e_{k,i}(m, n)$  125  
 $E(n)$  150  
 $e_e(n)$  166  
 $e_0(n)$  166  
 $F$  227  
 $f(A, r; X, Y, L)$  157  
 $f_C(x; q)$  139  
 $F_d(q)$  109  
 $f_i(x)$  126  
 $F_N$  85  
 $\mathcal{F}_m(q)$  170  
 $F_n$  75  
 $F_1(u)$  214  
 $f_S(z; q)$  30  
 $F(u)$  212  
 $f_0(q)$  43  
 $F_0(q)$  43  
 $G$  198  
 $\gamma$  (константа Эйлера) 102  
 $\gamma(f)$  227  
 $\Gamma(m; q)$  183  
 $\Gamma(s)$  95  
 $\gamma(T)$  227  
 $GF(q)$  218  
 $G(N, M; q)$  47  
 $G(q)$  171  
 $g(q)$  175  
 $g(\tau)$  100  
 $G(u)$  212  
 $G(z, s)$  94  
 $g(z, s)$  95  
 $\langle H \rangle$  17  
 $\langle H \rangle (\leq d)$  17  
 $H_i(x, q)$  145  
 $H_i(x)$  145  
 $H_k$  90  
 $H_{k,a}$  108  
 $H_{k,\pm a}$  108  
 $H_{k,i}(a; x; q)$  116  
 $H_n(t)$  63  
 $H_n(x_1, \dots, x_s)$  64  
 $H(z, s)$  95  
 $h(z, s)$  95  
 $I$  224  
 $I_{h,k}$  88  
 $\text{ind}(m_1, \dots, m_r; n)$  56  
 $\text{inv}(m_1, \dots, m_r; n)$  54  
 $I_1(z)$  94  
 $J_{k,i}(a; x; q)$  116  
 $\text{Ker } \varphi$  225  
 $k_\lambda$  227  
 $k_\pi$  227  
 $|\lambda|$  221  
 $\lambda$  221  
 $\lambda'$  22  
 $\lambda \vdash n$  15  
 $\lambda(\pi)$  221  
 $\lambda(\pi_1, \pi_2)$  226  
 $\mathcal{L}_C(\pi_a)$  141  
 $LC$  140  
 $L_i$  76  
 $L_k$  89  
 $L_n$  223  
 $L_n(q)$  178  
 $l(\pi_a)$  141  
 $L(z, s)$  95  
 $\mathcal{M}$  147  
 $M_i(n)$  28  
 $M_k(n)$  196  
 $m_{k,i}(a, b; \mu; N)$  154  
 $M_{k,i}(a, b; \mu; q)$  154  
 $M_{k,i}^*(a, b; \mu; q)$  159  
 $m_{k,i}(\mu; N)$  162  
 $M_{k,i}(\mu; q)$  162

$[m_1 + \dots + m_r]$  53  
 $[m_1, m_2, \dots, m_r]$ 
 $\mu_1$  106 $\mu_2$  107 $\mu_3$  107 $\mu_k(n)$  196 $\mu(\pi_1, \pi_2)$  223 $n$  220 $N$  18
 $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$  49
 $N(m_1, \dots, m_r; n)$  73
 $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_j}$  221
 $v(j)$  126 $v(\pi)$  225 $v(r)$  176 $\mathcal{O}$  15, 132 $\omega_{h,k}$  84 $\omega(j)$  126 $\omega(x)$  241 $\mathcal{O}(n)$  209 $P(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  70 $P=(\alpha_1, \dots, \alpha_r; m)$  70 $p_{b,c}(a-c)$  39 $p_e(\mathcal{D}, n)$  24 $p_e(\mathcal{D}(k, i), n)$  37 $\varphi$  139 $\Phi(m; q)$  183 $\varphi(q)$  175 $\varphi_0(q)$  43 $\varphi_1(x)$  105 $\varphi_2(\omega)$  106 $\varphi_3(\omega)$  106 $\pi(a, b/n, m)$  214 $\pi_{k,r}(n; q)$  190 $\pi_1(n, m)$  215 $\pi_1 \vee \pi_2$  223 $\pi_1 \wedge \pi_2$  223 $[\pi_1, \pi_2]$  223 $\pi(n, m)$  213 $\pi_r(n_1, n_2, \dots, n_k; q)$  187 $P_{\leq}(n; j)$  209 $P_i(r, n)$  28 $\mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j(x_1, \dots, x_r)$  212 $p_{k,i}(a, b; \mu; N)$  154 $P_{k,i}(a, b; \mu; q)$  154 $P_{k,i}(a, b; \mu; q)$  159 $p_{k,i}(\mu; N)$  162 $P_{k,i}(\mu; q)$  162 $p_{k,r}(m, n)$  190 $\oplus$  140 $P(n)$  15 $P(n)$  209 $P(N, M, n)$  47 $P_0(\mathcal{D}, n)$  24 $P_0(\mathcal{D}(k, i), n)$  38 $P_1(n)$  137 $(P, \omega)$  65, 241 $P_M(n)$  68 $P(\pi)$  206 $P(q)$  83 $\psi_k(n)$  91 $\Psi_r(m; q)$  183 $\psi_v(q)$  43 $P(S, n)$  16 $P_2(n)$  137 $\mathcal{Q}_j = \mathcal{Q}_j(x_1, \dots, x_r)$  212 $Q_{k,i}(n)$  162 $q_M(n)$  68 $(q)_n$  31 $Q(n)$  209 $Q(n; j)$  209 $Q_+(n)$  209 $Q_+(n; j)$  209 $R_\alpha(x)$  127 $r_i(\pi)$  154 $R(k, a; n)$  182 $R_{k,i}(x; q)$  122 $r(n)$  100 $R_1$  105 $R_2$  106 $\mathcal{S}$  16, 132 $\#(\lambda)$  30 $s(h, k)$  84 $\sigma(\{f_i\})$  30, 132 $\sigma(\lambda)$  24 $\sigma_2(i)$  243 $\text{sign } \lambda$  221 $S_k(t)$  231 $s(\lambda)$  24 $s_\lambda$  227 $\text{smax}$  215 $s_n$  227 $s(n, k)$  225 $S(n, k)$  225 $s_\pi$  227 $S_r$  176 $S(T; m, n)$  44 $\tau$  205 $U_m$  170 $u_n$  147 $U_{2r+1}$  43 $V_n(q)$  218 $V_s(n)$  43 $V_z$  94 $W_i(r, m, n)$  28 $W(k, r)$  190 $[x]$  95 $\{x\}$  95 $(X)_n$  225 $\xi_{a,b}$  214 $Y_n(g_1, g_2, \dots, g_n)$  211 $\mathbf{0}$  224 $\zeta(\pi_1, \pi_2)$  223 $\zeta(s)$  95 $\zeta(s, h)$  108



*Г. Эндрюс*

Теория разбиений

Редактор *С. М. Воронин*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры: *Г. В. Подвольская, Т. С. Вайсберг,*

*Л. С. Сомова*

ИБ № 11702

---

Сдано в набор 19.01.82. Подписано к печати 23.07.82. Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 16. Уч.-изд. л. 17,86. Тираж 7000 экз. Заказ № 45. Цена 1 р. 70 к.

---

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы.

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.